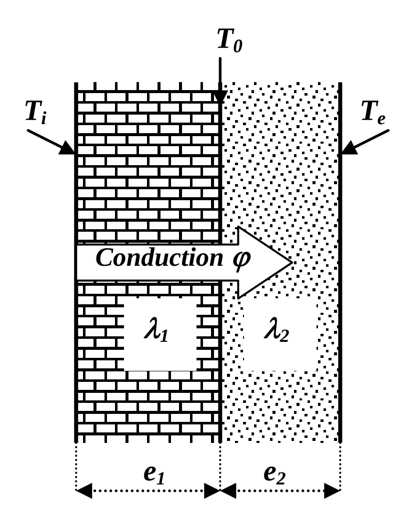
I. Généralités sur les modes de transfert thermique

Exercice 1:
La paroi d'un four de ***24,4 cm*** d'épaisseur est construite avec un matériau de conductivité thermique égale à ***1,3W/m.°C***. La paroi est isolée à l'extérieur par un matériau ayant une conductivité de ***0,346 W/m.°C*** pour que les pertes thermiques soient inférieures à ***1830 W/m²***. La température de la paroi interne du four est égale à ***1588 K*** et la température de la face externe est de ***299 K.*** Calculer l'épaisseur d'isolant nécessaire.

Solution:

Schéma descriptif :



Les deux matériaux, constituant la paroi du four, sont traversés par une même densité de flux thermique φ, donc:

$$\varphi = \lambda_1 \frac{T_i - T_0}{e_1} = \lambda_2 \frac{T_0 - T_e}{e_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = \lambda_2 \dfrac{T_0 - T_e}{\varphi} \\ T_0 = T_i - \dfrac{\varphi e_1}{\lambda_1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_2 = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} e_1 + \lambda_2 \dfrac{T_i - T_e}{\varphi} \\ T_0 = T_i - \dfrac{\varphi e_1}{\lambda_1} \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} e_2 \;;\; 17,9\ cm \\ T_0 \;;\; 1244,5\ °K \end{cases}$$

Donc, pour que les pertes thermiques $\boldsymbol{\varphi}$ à travers la paroi du four soient inférieures à $\boldsymbol{\varphi_{max}=1830\ W/m^2}$ il faut choisir un matériau de $\boldsymbol{\lambda_2=0,346\ W/m.°C}$ et d'épaisseur $\boldsymbol{e_2 \geq e_{min}=17,9\ cm}$.

Exercice 2:
Deux plaques de laiton ($\boldsymbol{\lambda_L=111\ W/m.°C}$), épaisses chacune de ***0,5 cm***, sont séparées par une feuille en caoutchouc de ***0,1 cm*** d'épaisseur. La face externe d'une plaque se trouve à ***0°C***, tandis que, sur la face

externe de l'autre plaque, la température est de ***100°C***. Trouver les températures des deux faces de la feuille en caoutchouc (le rapport des conductivités thermiques est $\lambda_L = 490\lambda_C$).

Solution:

Schéma descriptif:

Caoutchouc (λ_C)
T_1 T'_1 T'_2 T_2
$T_1 > T_2$
Plaque (1) Plaque (2)
Conduction φ
Laiton (λ_L) Laiton (λ_L)
x
e_1 e_2 e_1

Calculons tout d'abord la densité de flux de chaleur traversant cette paroi composite.
D'après le principe de conservation de l'énergie et la loi de *Fourier*, on a:

$$\varphi = \lambda_L \frac{T_1 - T'_1}{e_1} = \lambda_C \frac{T'_1 - T'_2}{e_2} = \lambda_L \frac{T'_2 - T_2}{e_1}$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T'_1}{\frac{e_1}{\lambda_L}} = \frac{T'_1 - T'_2}{\frac{e_2}{\lambda_C}} = \frac{T'_2 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_L}} = \frac{T_1 - T_2}{2\frac{e_1}{\lambda_L} + \frac{e_2}{\lambda_C}} \qquad (1)$$

$$\text{D'où :} \qquad \varphi = \frac{\lambda_L (T_1 - T_2)}{2e_1 + \frac{\lambda_L}{\lambda_C} e_2}$$

$$\text{A.N. :} \qquad \varphi \approx 22200 W / m^2$$

Calculons les températures T'_1 et T'_2.
D'après la relation ***(1)***, on a:

$$\begin{cases} \varphi = \frac{T_1 - T'_1}{\frac{e_1}{\lambda_L}} \\ \varphi = \frac{T'_2 - T_2}{\frac{e_1}{\lambda_L}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'_1 = T_1 + \frac{e_1}{\lambda_L}\varphi \\ T'_2 = T_2 + \frac{e_1}{\lambda_L}\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \text{A.N. :} \begin{cases} T'_1 \approx 99°C \\ T'_2 \approx 1°C \end{cases}$$

Exercice 3:

1- Un fluide chaud à $T_\infty = 260°C$ s'écoule sur une plaque plane, de ***1,5 m²*** de surface, maintenue à une température constante de ***82,2°C***. Si le coefficient de transfert de chaleur par convection est de ***113,5 W/m².°C***, déterminer la puissance thermique échangée entre le fluide et la plaque.

2- Du pétrole, à la température $T_\infty=120°C$, est mis en circulation forcée dans un tube cylindrique, à $T_S=60°C$, de diamètre $D=1\ cm$. Le coefficient de transfert de chaleur par convection forcée est $h=1740\ W/m^2.°C$. Calculer le flux de chaleur échangé entre le fluide et le tube, par unité de longueur de tube.

Solution:

1- *Fluide s'écoulant sur une plaque plane* :

La puissance thermique transférée par convection du fluide chaud à la plaque froide, par unité de surface de la plaque, est donnée par la loi de *Newton*:

$$\varphi = h(T_\infty - T_S)$$

A.N.: $$\varphi \approx 30270W$$

2- *Fluide mis en circulation forcée dans un tube cylindrique*:

La puissance thermique transférée par convection du fluide chaud à la plaque froide est donnée par la loi de *Newton*:

$$\Phi = hS(T_\infty - T_S)$$

Il s'ensuit que la puissance thermique transférée par convection, par unité de longueur du tube est donnée par:

$$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = h\pi D(T_\infty - T_S)$$

A.N. : $$\Phi' \approx 3280W / m$$

II. Rayonnement thermique

Exercice 4:

1- La température d'un corps noir est de ***650°C***. Quelle doit être sa température pour doubler son énergie rayonnée par unité de temps?

2- Une sphère de diamètre ***D=1m***, de température uniforme T_S rayonne dans le milieu environnant une puissance thermique de ***5 KW***. Calculer la température de cette sphère, assimilée à un corps gris d'émissivité $\varepsilon=0,75$. La constante de *Stefan-Boltzmann* est $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

Solution:

- La puissance totale rayonnée, par unité de surface, par un corps noir à la température ***T*** est fournie par la loi de ***Steffan-Boltzmann***:

$$M^0(\lambda)=\sigma T^4 \quad (W/m^2)$$

où σ est la constante de *Steffan-Boltzmann*: $\begin{cases}\sigma = 5,67\times 10^{-8}\ W/m^{2.}.K^4 \\ ou \\ \sigma = 4,88\times 10^{-8}\ K\text{cal}/h.m^{2.}.K^4\end{cases}$

$M^0(T)$: émittance totale du corps noir.

- L'émittance totale d'un corps réel est:

$$M(T)=\varepsilon M^0(\lambda,T)=\varepsilon\sigma T^4$$

où ε est l'émissivité du corps réel (grandeur radiative caractéristique du corps).

1- *Corps noir:*

La puissance thermique émise, par unité de surface par un corps noir à la température ***T=650°C*** est:

$$M^0(\lambda)=\sigma T^4 \quad (W/m^2)$$

$$M^0 = 41152\cdot W/m^2$$

Pour doubler la puissance émise par ce corps, il faut que sa température soit égale à *T'*:

$$M^{0\prime}=2M^0 \Rightarrow \sigma T'^4 = 2\sigma T^4$$

$$T' = 2^{\frac{1}{4}}T \Rightarrow T' = 1097,63°K = 824,64°C$$

2- *Corps réel:*

Sphère=corps gris (***D***, ε, T_S)

La puissance thermique rayonnée par la sphère s'exprime comme suit:

$$\Phi = SM = S\varepsilon M^0 = \pi D^2\varepsilon\sigma T_S^4$$

La température de la sphère est donnée par:

$$T_S = \left(\frac{\Phi}{\pi D^2\varepsilon\sigma}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_S \approx 440°K = 167°C$$

Exercice 5:

Pour chauffer une pièce d'un appartement on utilise un radiateur cylindrique de diamètre ***D=2 cm*** et de longueur ***L=0,5 m***. Ce radiateur rayonne comme un corps noir et émet une puissance thermique de ***1 KW***. On néglige les échanges thermiques par convection et conduction.

1- Calculer la température du radiateur.

2- Déterminer la longueur d'onde λ_{max} pour laquelle la densité spectrale d'énergie émise par le radiateur est maximale, $M°_{\lambda max}$.

3- Quelle devrait être la température du radiateur pour que cette longueur d'onde soit de $2\mu m$? Quelle serait alors la puissance dégagée?

Solution:

1- La puissance thermique rayonnée par le radiateur est:

$$P = S\sigma T^4$$

$$\Rightarrow T = \left(\frac{P}{\pi\sigma LD} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$A.N.: T \approx 865{,}6°K \approx 592{,}6°C$$

2- λ_{max} et $M°_{\lambda max}$ sont donnés par les deux lois de ***Wien***:

$$\begin{cases} \lambda_{max}.T = 2898\ (\mu m.°K) \\ M^0_{\lambda_{max}} = BT^5\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

$$AN: \begin{cases} \lambda_{max}. = 3{,}35\ \mu m.\ (I.R.) \\ M^0_{\lambda_{max}} = 6254\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

3- Pour que $\lambda_{max}=2\ \mu m$ il faut que la température T du radiateur soit égale à:

$$T = \frac{2898}{\lambda_{max}}$$

$$A.N.: T \approx 1449°K \approx 1176°C$$

A cette température le radiateur émet la puissance:

$$P \approx 7852\,W$$

Exercice 6:

Indiquer quelle fraction de l'émittance totale d'un corps noir à ***5500°C*** est située dans le domaine visible ($0{,}4 \le \lambda \le 0{,}8\mu m$). Calculer λ_{max} et M_{max}.

Solution:

1- Les paramètres d'entrée de la table donnant $F_{0-\lambda T}$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 T = 2309\mu.°K \\ \lambda_2 T = 4618\mu.°K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0{,}122 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0{,}5822 \end{cases}$$

Donc :

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_1 T} - F_{0-\lambda_2 T} = 0{,}46$$

Environ ***46%*** du rayonnement émis par le corps noir à ***T=5500°C*** est situé dans le domaine visible.

2- D'après les deux lois de ***Wien***, on a:

$$\begin{cases} \lambda_{max} T = 2898 \, (\mu m . °K) \\ M_{\lambda_{max}} = BT^5 \, (KW / m^2 . \mu m) \end{cases}$$

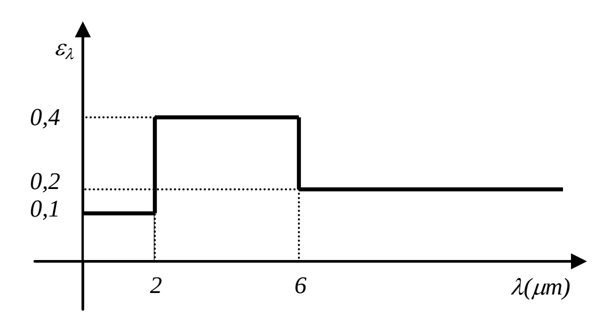
$$avec : \, B = 1,287 \times 10^{-11} \, KW / K^5 . m^2 . \mu m$$

$$A.N. : \begin{cases} \lambda_{max} \approx 0,502 \mu m \; (Indigo) \\ M_{\lambda_{max}} \approx 82525 \, KW / m^2 . \mu m \end{cases}$$

Exercice 7:

On donne la courbe de variation de l'émissivité monochromatique $\varepsilon_\lambda(\lambda,T)$ en fonction de la longueur d'onde λ. Calculer l'émissivité totale $\varepsilon(T)$ *à* $T=2000°K$.

Indication: On se servira de la relation $\varepsilon(T) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda,T) \varepsilon_\lambda(\lambda,T) d\lambda$ et on fera apparaître les intégrales $F_{0-\lambda T}$.



Solution:

L'émittance totale $M(T)$ rayonnée par un corps réel de température T et d'émissivité $\varepsilon(T)$ s'écrit :

$$M(T) = \varepsilon(T) M^0(T) = \varepsilon(T) \sigma T^4$$

D'où :

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda,T) \varepsilon_\lambda(\lambda,T) d\lambda$$

$$avec : \, \varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,1 & pour \;\; 0 \le \lambda < \lambda_1 \\ \varepsilon_2 = 0,4 & pour \;\; \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ \varepsilon_3 = 0,2 & pour \;\; \lambda > \lambda_2 \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 2 \, \mu m \;\; et \;\; \lambda_1 = 6 \, \mu m)$$

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 \left[\frac{1}{\sigma T^4} \int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0(\lambda,T) \varepsilon_\lambda(\lambda,T) d\lambda \right] + \varepsilon_2 \left[\frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda}^{\lambda_2} M_\lambda^0(\lambda,T) \varepsilon_\lambda(\lambda,T) d\lambda \right]$$
$$+ \varepsilon_3 \left[\frac{1}{\sigma T^4} \int_{\lambda_2}^{\infty} M_\lambda^0(\lambda,T) \varepsilon_\lambda(\lambda,T) d\lambda \right]$$

$$D'où : \qquad \varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0-\lambda_1 T} + \varepsilon_2 F_{\lambda_1 T - \lambda_2 T} + \varepsilon_3 \left(1 - F_{0-\lambda_2 T} \right)$$

Les paramètres d'entrée de la table donnant $\mathbf{F_{0-\lambda T}}$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 T = 4000\ \mu.°K \\ \lambda_2 T = 12000\ \mu.°K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0,4809 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0,9450 \end{cases}$$

Donc : $$\varepsilon(T = 2000°K) = 0,245$$

Exercice 8:

Les murs d'un local sont recouverts d'une couche de peinture blanche d'émissivité monochromatique $\varepsilon_\lambda(\lambda,T)$ variant selon la loi suivante:

$$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,3 ...0 < \lambda < 3\mu m \\ \varepsilon_2 = 0,9..\lambda > 3\mu m \end{cases}$$

L'un des murs de ce local est en contact avec l'extérieur (façade) et a une température $T_1=33°C$, les autres murs ont une température identique $T_2=25°C$.

1- Calculer l'émissivité totale $\varepsilon_1=\varepsilon(T_1)$ de la surface du mur en contact avec l'extérieur.
2- Même question pour les autres murs.

Solution :

1. L'émittance totale ***M(T)*** rayonnée par un corps réel de température ***T*** et d'émissivité $\varepsilon(T)$ s'écrit :

$$M(T) = \varepsilon(T) \times M^0(T) = \varepsilon(T) \times \sigma \times T^4$$

D'où :

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{1}{\sigma T^4}\int_0^\infty M_\lambda^0(\lambda,T) \times \varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda$$

avec : $$\varepsilon_\lambda(\lambda,T) = \begin{cases} \varepsilon_1 = 0,3 \quad \textbf{pour} \quad 0 \le \lambda < \lambda_1 \\ \varepsilon_2 = 0,9 \quad \textbf{pour} \quad \lambda > \lambda_1 \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 3\ \mu m)$$

$$\varepsilon(T) = \varepsilon_1\left[\frac{1}{\sigma T^4}\int_0^{\lambda_1} M_\lambda^0(\lambda,T)\varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda\right] + \varepsilon_2\left[\frac{1}{\sigma T^4}\int_{\lambda_1}^\infty M_\lambda^0(\lambda,T)\varepsilon_\lambda(\lambda,T)d\lambda\right]$$

D'où : $$\varepsilon(T) = \varepsilon_1 F_{0-\lambda_1 T} + \varepsilon_2\left(1 - F_{0-\lambda_1 T}\right)$$

Le paramètre d'entrée de la table donnant $F_{0-\lambda T}$ est :

$$\lambda_1 \times T_1 = 918 \approx 920 \quad \Rightarrow \quad F_{0-\lambda_1 T_1} = 0 \quad \text{(d'après la table)}$$

Finalement, l'émissivité totale $\varepsilon_1 = \varepsilon(T_1)$ de la surface du mur en contact avec l'extérieur vaut:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon(T_1) = 0,9$$

2. Pour les autres murs, un même raisonnement conduit à:

$$\lambda_1 \times T_2 = 894 \approx 900 \quad \Rightarrow \quad F_{0-\lambda_1 T_2} = 0 \quad \text{(d'après la table)}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon(T_2) = 0,9$$

Exercice 9:

Le refroidissement du moteur d'une voiture comporte un échangeur de chaleur que l'on appelle couramment radiateur. Le mouvement de l'air au voisinage de la surface de cet échangeur dû à l'action d'un ventilateur avec un coefficient de convection $h=1149,5\ W/m^2.C$. On considère un radiateur de surface $0,16\ m^2$ et de température extérieure de $T_e=76°C$. La température de l'air est $T_a=20°C$.

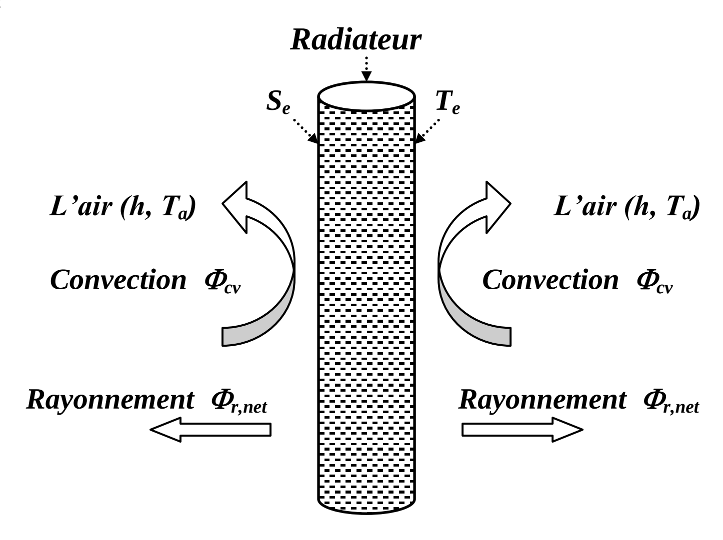
1- Calculer la puissance d'échange convectif de ce radiateur avec l'air.

2- L'émissivité du radiateur est ε***=0,85*** et σ***=5,67×10***$^{-8}$ ***W/m***^{2}***.K***^{4}, constante de ***Stefan-Boltzmann***. L'air est considéré comme un corps noir.
   - ***a-*** Quelle est la puissance rayonnée par le radiateur?
   - ***b-*** Quelle est la puissance absorbée par le radiateur (corps gris) en provenance de l'air environnant?
   - ***c-*** Quel est le taux net du rayonnement du radiateur?

3- Selon vous, quel doit être le terme exact pour désigner cet échangeur de chaleur ''***convecteur***'' ou ''***radiateur***''? Justifier votre réponse.

Solution :

Schéma descriptif:



1- La puissance thermique, échangée par convection entre la paroi externe du radiateur et l'air environnant, est donnée par :

$$\Phi_{cv} = h.S_e\left(T_e - T_a\right)$$

$$A.N.: \Phi_{cv} \approx 10299,5W$$

2- La puissance thermique rayonnée par le radiateur est:

$$\Phi_e = SM_e = S\left(\varepsilon M_e^0\right) = S\varepsilon\sigma T_e^4$$

$$A.N.: \quad \Phi_e \approx 114,4\,W$$

- La puissance thermique absorbée par le radiateur en provenance de l'air est:

$$\Phi_a = S\left(\alpha M_a\right) = S\alpha\left(\varepsilon' M_a^0\right) = S\alpha\left(\varepsilon' \sigma T_a^4\right)$$

$$\Phi_a = \left(S\varepsilon\sigma\right)T_a^4$$

$$(air \equiv corps\,noir\,(\,\varepsilon' = \alpha' = 1);\ radiateur \equiv corps\,gris\,(\,\varepsilon = \alpha\,))$$

$$A.N.: \ \Phi_a = 56,8\,W$$

- La puissance thermique nette transférée par rayonnement du radiateur vers l'air est donnée par:

$$\Phi_{r,net} = S_e \mathcal{F}_{e,a}\, \sigma\left(T_e^4 - T_a^4\right)$$

où $\mathcal{F}_{e,a}$ est le facteur de forme gris donné par:

$$avec: \mathcal{F}_{e,a} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_e} - 1 + \frac{1}{F_{e,a}} + \frac{S_e}{S_a}\left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1\right)} = \varepsilon_e = \varepsilon \qquad (\text{car } F_{e,a} = 1 \text{ et } \varepsilon_a = 1)$$

D'où:

$$\Phi_{r,net} = S_e \varepsilon \sigma \left(T_e^4 - T_a^4\right)$$

$$A.N.: \ \Phi_{r,net} \approx 57,6\,W$$

ou tout simplement:

$$\Phi_{r,net} = \Phi_e - \Phi_a$$

$$A.N.: \ \Phi_{r,net} \approx 57,6 \ W$$

3- $\frac{\Phi_{cv}}{\Phi_{r/net}} \approx 179 \Rightarrow \Phi_{cv} \rangle\rangle \Phi_{r/net}$: la convection prédomine le rayonnement, cet échangeur de chaleur doit donc être désigné par le terme ''***convecteur***'' et non pas ''***radiateur***''.

Exercice 10:

Une sphère de diamètre ***d=10 cm*** a une distribution de température uniforme $T_s=1000°C$ et est plongée dans l'air ambiant à la température $T_a=20°C$. La sphère et l'air sont considérés comme des corps noirs. La constante de ***Stefan-Boltzmann*** est $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

1- Calculer le flux net échangé par la sphère.
2- Calculer la longueur d'onde qui correspond à l'émission maximale.
3- Calculer la fraction d'émittance contenue dans le visible. Est ce que le rayonnement de la sphère sera perceptible à l'œil?

Solution:

1- Flux thermique échangé par rayonnement entre la sphère et l'air environnant:

$$\Phi_{r,net;s\to a} = S_s F_{sa} \sigma \left(T_s^4 - T_a^4\right) = S\sigma\left(T_s^4 - T_a^4\right)$$

Dans ce cas, on a:
$F_{sa}=1$, car la surface de la sphère et les couches d'air l'avoisinant sont considérées comme surfaces noires ($\varepsilon_s=\varepsilon_a=1$) sphériques concentriques (S_s est complètement entouré par $S_a \Rightarrow F_{sa} = 1$).

$$\text{D'où:} \qquad \Phi_{net} = \pi d^2 \sigma \left(T_s^4 - T_a^4\right)$$

$$A.N.: \ \Phi_{net} \approx 4665\,W$$

2- λ_{max} et $M°_{\lambda max}$ sont donnés par les deux lois de ***Wien***:

$$\begin{cases} \lambda_{max}.T_s = 2898\ (\mu m.°K) \\ M^0_{\lambda_{max}} = BT^5\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

$$AN: \begin{cases} \lambda_{max} = 2,28\ \mu m.\ (I.R.) \\ M^0_{\lambda_{max}} = 43025\ (W/m^2.\mu m.) \end{cases}$$

3- Fraction d'émittance contenue dans le visible $[0,4;0,8]\,\mu m$:

$$\begin{cases} \lambda_1 T_s = 509\,\mu.°K \\ \lambda_2 T_s = 1018\,\mu.°K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{0-\lambda_1 T} = 0,000 \\ F_{0-\lambda_2 T} = 0,0004 \end{cases}$$

Donc:

$$F_{\lambda_1 T-\lambda_2 T} = F_{0-\lambda_1 T} - F_{0-\lambda_2 T} = 0,0004$$

Environ ***0,04%*** de l'énergie émise par la sphère est rayonné dans le domaine visible. Ce rayonnement est donc faiblement perceptible à l'œil.

Exercice 11:

Une plaque en cuivre poli (***ε=0,04***) est exposée sur une face à un rayonnement incident de **600 *W/m²***, l'autre face étant parfaitement isolée. Evaluer la température d'équilibre de la plaque:

1- En considérant uniquement ses pertes radiatives avec un environnement à ***25°C***.

2- En supposant de plus que la plaque échange de la chaleur par convection avec l'air environnant avec un coefficient d'échange ***h=15 W/m².°C***.

3- Reprendre les questions *1)* et *2)* si la plaque est en cuivre oxydé (***ε=0,73)***.

Solution:

Plaque en cuivre poli=corps opaque gris à émission diffuse: $\begin{cases} \tau = 0 \\ \varepsilon_{\lambda,ox} = \alpha_{\lambda,ox} \Rightarrow \varepsilon = \alpha \end{cases}$

L'une des surfaces frontières de cette plaque est exposée à un rayonnement incident φ_i, l'autre étant maintenue parfaitement isolée: $\varphi_{cd}=0$.

$\varphi_{cd}=0$ implique que la plaque n'est traversée par aucun flux conductif, c'est-à-dire uniformité de température en tous les points de la plaque (absence de gradient de température). La plaque est donc en équilibre thermique.

1- Cas où l'on tient compte uniquement des pertes radiatives de la plaque avec l'environnement à T_∞=***25°C***.

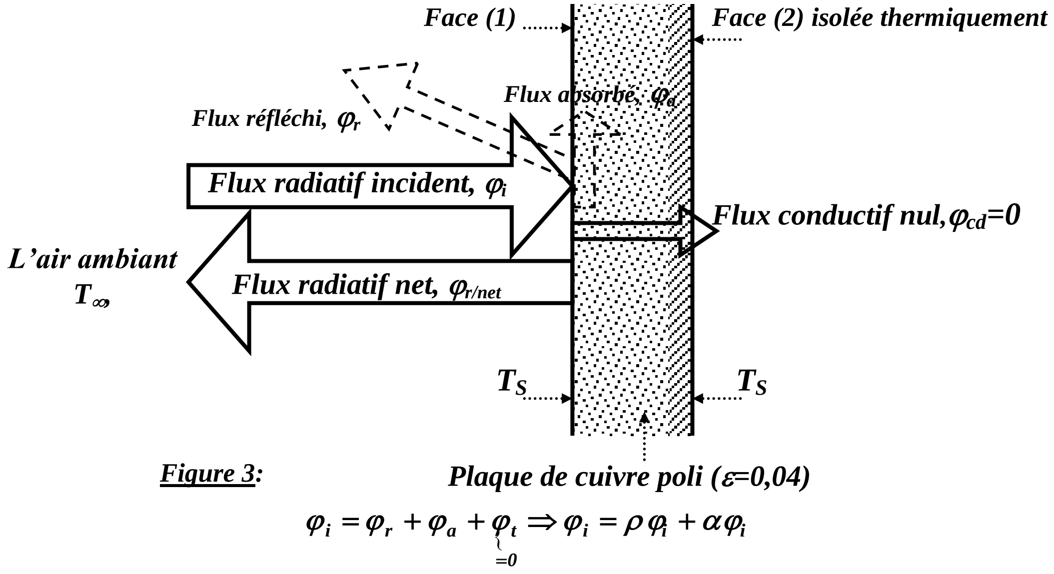


Figure 3: ***Plaque de cuivre poli (ε=0,04)***

$$\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a + \underbrace{\varphi_t}_{=0} \Rightarrow \varphi_i = \rho\varphi_i + \alpha\varphi_i$$

- Bilan thermique sur la plaque:

Gains-Pertes= Puissance réellement transmise à travers la plaque

$$\varphi_a - \varphi_{r/net} = \varphi_{cd} = 0 \qquad (1)$$

Avec:

$\varphi_a = \alpha\varphi_i = \varepsilon\varphi_i$: flux radiatif absorbé par la plaque (assimilée à un corps gris)

$\varphi_{r/net}=\mathcal{F}_{12}\sigma(T_S^4-T_\infty^4)$: flux radiatif net échangé entre deux surfaces grises.

et $\mathcal{F}_{12}=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\dfrac{1}{F_{12}}+\dfrac{S_1}{S_2}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}$

Les couches d'air avoisinant la paroi solide peuvent être considérées comme un corps noir ***(ε_2=1)*** en vis-à-vis total avec la plaque (surface grise $\varepsilon_1=\varepsilon$). Donc,

$$F_{12}=1 \qquad \Rightarrow \mathcal{F}_{12}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1} \qquad \text{(car } S_1=S_2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{12}=\varepsilon_1=\varepsilon$$

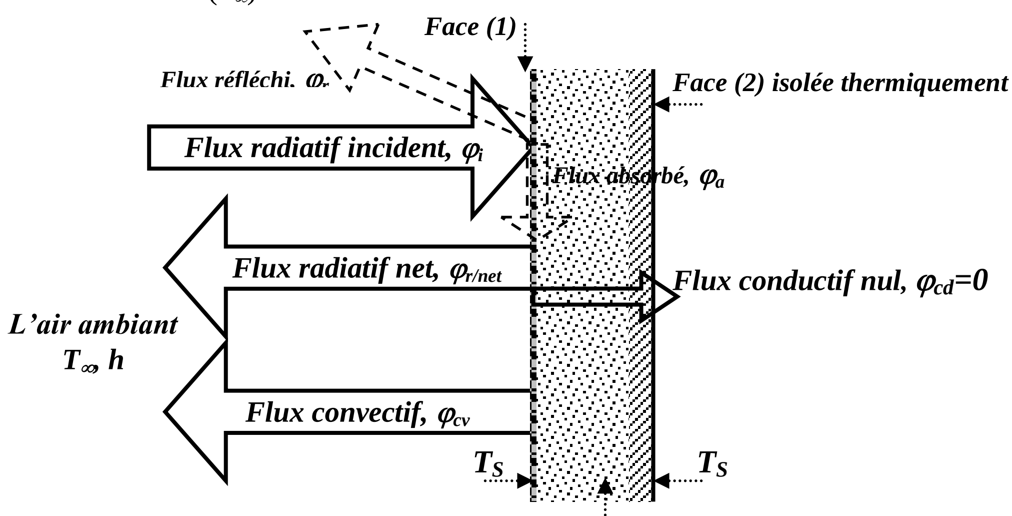
En remplaçant $\varphi_{r/net}$ par son expression dans la relation (1):

$$\varepsilon\varphi_i-\varepsilon\sigma\left(T_S^4-T_\infty^4\right)=0$$

$$T_S=\left(\frac{\varphi_i}{\sigma}+T_\infty^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_S\approx 368{,}6°K=95{,}6°C$$

2- Cas où l'on tient compte des échanges radiatifs et convectifs entre la plaque et le milieu environnant (T_∞):



- Bilan thermique sur la plaque:

  Gains-Pertes= Puissance thermique réellement transmise à travers la plaque

$$\underbrace{\varphi_a}_{\substack{\text{Flux radiatif absorbé}\\ \text{par la plaque}}}-\left(\underbrace{\varphi_{r/net}}_{\substack{\text{Flux radiatif net échangé}\\ \text{entre la plaque et l'air}}}+\underbrace{\varphi_{cv}}_{\substack{\text{Flux convectif échangé}\\ \text{entre la plaque et l'air}}}\right)=\underbrace{\varphi_{cd}}_{\substack{\text{Flux conductif transféré}\\ \text{à travers la plaque}}}=0$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi_i-\left(\varepsilon\sigma\left(T_S^4-T_\infty^4\right)+h\left(T_S-T_\infty\right)\right)=0 \qquad (2)$$

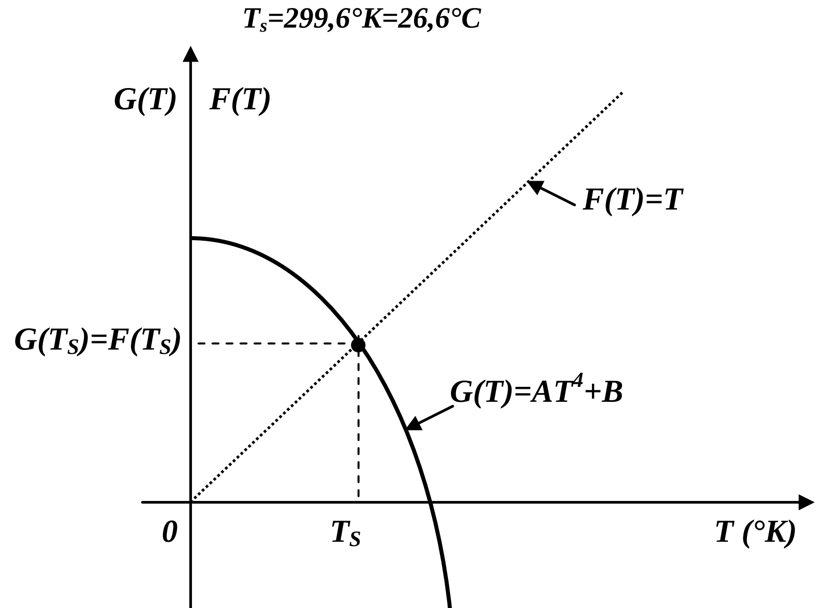
$$\Rightarrow \quad -\frac{\varepsilon\sigma}{h}T_S^4+\left(T_\infty+\frac{\varepsilon\varphi_i}{h}+\frac{\varepsilon\sigma}{h}T_\infty^4\right)=T_S$$

On pose :
$$\begin{cases} A=-\dfrac{\varepsilon\sigma}{h}\\ B=T_\infty+\dfrac{\varepsilon\sigma}{h}T_\infty^4+\dfrac{\varepsilon\varphi_i}{h}\end{cases}$$

D'où : $$AT_S^4 + B = T_S \Leftrightarrow G(T_S) = F(T_S)$$
$$A.N.: \begin{cases} A = -1{,}512 \times 10^{-10} °K^{-3} \\ B = 300{,}8° K \end{cases}$$

La résolution graphique de l'équation $G(T_S)=F(T_S)$ conduit à la solution suivante:

$$T_s=299{,}6°K=26{,}6°C$$



Avec cette valeur $T_S=299{,}57°K=26{,}57°C$ on a:

$$\begin{cases} \varphi_a = \varepsilon\varphi_i = 24W / m^2 \\ \varphi_{cv} = h(T_S - T_\infty) \approx 23{,}6W / m^2 \\ \varphi_{net} = \varepsilon\sigma(T_S^4 - T_\infty^4) \approx 0{,}4W / m^2 \end{cases}$$

On vérifie que : $\varphi_a = \varphi_{r/net} + \varphi_{cv}$

Conclusion:

On vient de trouver que $\varphi_{r/net} <<< \varphi_{cv}$, donc, en réalité, c'est le flux radiatif net qui doit être négligé devant le flux convectif.

3- *Cas de cuivre oxydé (ε'=0,73):*

- Cas où l'on tient compte uniquement des pertes radiatives de la plaque avec l'environnement à $T_\infty=25°C$.

En suivant le même raisonnement, on obtient:

$$\varepsilon'\varphi_i - \varepsilon'\sigma(T_S^4 - T_\infty^4) = 0$$

$$T_S = \left(\frac{\varphi_i}{\sigma} + T_\infty^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$T_S \approx 368{,}6° K = 95{,}6°C$$

- Cas où l'on tient compte des échanges radiatifs et convectifs entre la plaque et le milieu environnant (T_∞):

$$\varepsilon'\varphi_i - \left(\varepsilon'\sigma\left(T_S^4 - T_\infty^4\right) + h\left(T_S - T_\infty\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\varepsilon'\sigma}{h}T_S^4 + \left(T_\infty + \frac{\varepsilon'\varphi_i}{h} + \frac{\varepsilon'\sigma}{h}T_\infty^4\right) = T_S$$

On pose : $\begin{cases} A' = -\dfrac{\varepsilon'\sigma}{h} \\ B' = T_\infty + \dfrac{\varepsilon'\sigma}{h}T_\infty^4 + \dfrac{\varepsilon'\varphi_i}{h} \end{cases}$

$$AT_S^4 + B = T_S \Leftrightarrow G(T_S) = F(T_S)$$

D'où : A.N. : $\begin{cases} A' = -2{,}76\times10^{-9}\,°K^{-3} \\ B' = 348{,}96°K \end{cases}$

La résolution graphique de l'équation $G(T_S)=F(T_S)$ conduit à la solution suivante:

$$T_s = 320°K = 47°C$$

Avec cette valeur $T_S=320°K=47°C$ on a:

$$\begin{cases} \varphi_a = \varepsilon'\varphi_i = 438 W/m^2 \\ \varphi_{cv} = h\left(T_S - T_\infty\right) \approx 330 W/m^2 \\ \varphi_{net} = \varepsilon'\sigma\left(T_S^4 - T_\infty^4\right) \approx 108 W/m^2 \end{cases}$$

On vérifie que : $\varphi_a = \varphi_{r/net} + \varphi_{cv}$

Conclusion:
Dans ce cas la contribution de la convection et celle du rayonnement sont comparables ($\varphi_{cv} \sim \varphi_{r/net}$).

Exercice 12: Convecteur

Les pertes thermiques d'un local d'habitation sont estimées à ***2500 W.*** Pour maintenir sa température interne à $T_i=20°C$, on utilise un convecteur à la température $T_S=61{,}7°C$ (température de l'eau chaude). Le coefficient d'échange convectif sur la surface du convecteur est $h_i=10\ W/m^2.°C$.

1- Calculer la surface d'échange ***S*** du convecteur.

2- Les pertes thermiques ont lieu principalement à travers deux murs en béton ($\lambda=1{,}75\ W/m.°C$), en contact avec le milieu extérieur, dont chacun est de ***10 m*** de long, ***3 m*** de haut et de ***19 cm*** d'épaisseur. La température de l'air à l'extérieur est $T_e=11°C$. Les pertes thermiques à travers les autres murs, le plancher et le plafond étant négligées. Calculer les valeurs des coefficients d'échange thermique du côté des ambiances interne h_i et externe h_e, sachant que $h_e=1{,}6\times h_i$.

3- En réalité, ***20%*** de la puissance du convecteur est dissipée par des pertes à l'arrière de l'appareil à travers la paroi le supportant. Quelle puissance de chauffage à installer pour avoir une température de ***20°C*** dans le local.

Exercice 13: Convecteur-radiateur (Extrait du contrôle de transfert de chaleur GC1-2010/2011)

Pour maintenir l'air à l'intérieur d'un local à $T_a=20°C$, on compense les pertes thermiques à travers les parois de ce local en utilisant un convecteur-radiateur de surface totale $S=5\ m^2$, de température externe $T_S=80°C$ et d'émissivité $\varepsilon=0{,}86$. Le coefficient d'échange convectif sur la surface du convecteur-radiateur est $h=10\ W/m^2.°C$. L'air ambiant est assimilé à un corps noir ($\varepsilon_a=1$). La constante de ***Stefan-Boltzmann*** est $\sigma=5{,}67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.

4- Citer les modes de transfert de chaleur en présence.

5- Calculer le flux de chaleur transféré par convection du système de chauffage vers l'air ambiant.

6- Calculer le flux de chaleur net transféré par rayonnement du système de chauffage vers l'air ambiant.

7- En déduire la puissance thermique totale diffusée par le système de chauffage vers l'air ambiant.
8- Sachant que le rendement du système de chauffage est de ***90,7%***, calculer la puissance de chauffage à installer.

Solution :

- Surface du convecteur-radiateur: surface ***grise*** ($S_1 = S = 5\ m^2$, $T_1=T_S=40°C$ et $\varepsilon_1=\varepsilon=0,86$).
- Couches d'air avoisinant la surface du convecteur-radiateur : surface ***noire*** ($S_2=S_1=S$, $T_2=T_a=20°C$ et $\varepsilon_2=\varepsilon_a=1$).

1. Modes de transfert de chaleur en présence: convection+rayonnement entre la surface du convecteur-radiateur et l'air environnant.
2. Flux de chaleur transféré par convection du système de chauffage vers l'air ambiant.

$$\Phi_{cv} = h \times S \times (T_s - T_a) = 3000\ W$$

3. Flux de chaleur net transféré par rayonnement du système de chauffage vers l'air ambiant.

$$\Phi_{r,net:1\to2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Les indices ***1*** et ***2*** correspondent respectivement au système de chauffage et à l'air.
Avec :

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \varepsilon_1 = \varepsilon$$

L'expression du flux devient:

$$\Phi_{r,net:1\to2} = S \times \varepsilon \times \sigma \times (T_s^4 - T_a^4) \approx 1990\ W$$

4. La puissance thermique totale diffusée par le système de chauffage vers l'air ambiant représente la puissance utile.

$$\Phi_{utile} = \Phi_{cv} + \Phi_{r,net:1\to2} = 4990\ W$$

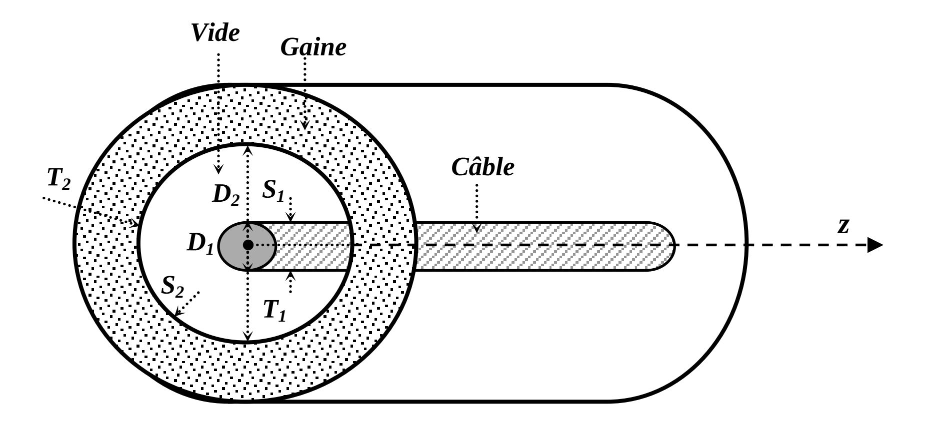
5. Puissance de chauffage à installer $\Phi_{théorique}$.
Le rendement du système de chauffage est défini comme suit:

$$R\% = \frac{\Phi_{utile}}{\Phi_{théorique}} \times 100$$

Il en résulte que

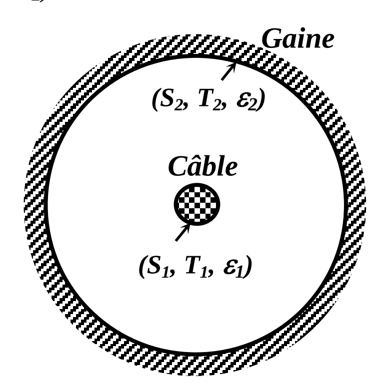
$$\Phi_{théorique} = \frac{\Phi_{utile}}{R\%} \times 100 \approx 5500\ W$$

Exercice 14: (Extrait du devoir libre de transfert de chaleur GC1-2012/2013)
Un câble chauffant électrique de longueur ***20 cm*** est placé au centre d'une gaine, le vide étant créé entre le câble et la gaine. Le diamètre du câble est de ***5 mm*** et de celui de la gaine est de ***2 cm***.
1- En négligeant les effets de bords aux extrémités, donner la valeur des différents facteurs de forme.
2- Le câble doit dissiper une puissance de ***30 W*** sans que sa température ne dépasse ***800 K***. Sachant que les deux surfaces sont noires, calculer la température maximale que doit avoir la gaine.
3- Que devient cette température si le câble a un coefficient d'émission ε_1 de ***0,9*** et la gaine un coefficient d'émission ε_2 de ***0,8***.
4- Dans les conditions de la question ***3***, calculer la température maximale de la gaine si l'on place un cylindre écran de diamètre ***1 cm*** et de coefficient d'émission égal à ***0,6***.



Solution:

- Câble électrique: cylindre plein *(D_1=0,5 cm, L=20 cm,* $S_1 = \pi \times D_1 \times L = 31,42 \times 10^{-4}\ m^2$,$T_1$ et ε_1*)*.
- Gaine (isolant): cylindre creux *(D_2=2 cm* (diamètre interne), *L=20 cm*, $S_2 = \pi \times D_2 \times L = 125,66 \times 10^{-4}\ m^2$,$T_2$ et ε_2*)*.



1. Le câble et la gaine correspondent à deux cylindres coaxiaux de longueur infinie $\left(L \gg \frac{D_2 - D_1}{2} = 0,75\right)$. Les facteurs de forme géométriques sont donc:

$$\begin{cases} F_{11} = 0 & (S_1\text{: surface convexe}) \\ F_{22} = 1 - \dfrac{S_1}{S_2} = 1 - \dfrac{D_1}{D_2} = 0,75 & (S_2\text{: surface concave}) \end{cases}$$

Compte tenu de la règle de complémentarité, on a :

$$\begin{cases} F_{12} = 1 - F_{11} = 1 \\ F_{21} = 1 - F_{12} = 0,25 \end{cases}$$

2. Les surfaces S_1 et S_2 sont noires (ε_1=ε_2=*1*).
Calculons la température maximale que doit avoir la gaine sachant que le câble doit dissiper une puissance ***Φ=30 W*** sans que sa température ne dépasse ***800 K***.
Les deux surfaces sont séparées par le vide, *le seul mode de transfert de chaleur pouvant donc exister est le rayonnement*.

Le câble (S_1) dissipe la puissance Φ par rayonnement :

$$\Phi = \Phi_{r,net:1\to 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

$$\Phi = \frac{\pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \dfrac{1}{F_{12}} + \dfrac{D_1}{D_2} \times \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right)$$

Si T_1 est maximale alors T_2 est maximale.

Donc:

$$\boldsymbol{\Phi = \pi \times D_1 \times L \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - T_{2,max}^4\right)}$$

D'où on tire :

$$\boldsymbol{T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{\Phi}{\pi \times D_1 \times L \times \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 701\ K = 428°C}$$

3. Les surfaces S_1 et S_2 sont grises ($\varepsilon_1=0,9$ et $\varepsilon_2=0,8$)

$$\boldsymbol{\Phi = \Phi_{r,net:1\rightarrow 2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - T_{2,max}^4\right)}$$

Avec:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{D_1}{D_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = 0,8521}$$

Par suite:

$$\boldsymbol{T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{\Phi}{\pi \times D_1 \times L \times F_{12} \times \sigma}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 678,5\ K = 405,5°C}$$

4. On place un cylindre écran thermique de diamètre $D_3=1\ cm$, de longueur L et de coefficient d'émission $\varepsilon_3=0,6$.

Calculons la valeur de $T_{2,max}$.

- Ecran thermique cylindre creux de très faible épaisseur ***e=D$_e$-D$_i$*** ***($D_i \approx D_e = D_3 = 1\ cm$, $L=20\ cm$,*** $S_3 = \pi \times D_3 \times L = 62,83 \times 10^{-4}\ m^2$, T_3 et $\varepsilon_3=0,6$)

Effectuons un bilan thermique sur l'écran

Le bilan thermique s'écrit, littéralement, sous la forme:

Gains- Pertes+Production (ou consommation)=Accumulation

Dans le milieu considéré (écran), il n'y a pas de production (consommation) ni d'accumulation d'énergie. Ainsi, le bilan énergétique se réduit à :

Gains- Pertes=0

- ***Gains:***

L'écran reçoit de la part du câble le flux radiatif suivant:

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net:1\rightarrow 3} = S_1 \times \mathcal{F}_{13} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_3^4\right)}$$

- ***Pertes:***

L'écran cède à la gaine le flux radiatif suivant:

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net:3\rightarrow 2} = S_3 \times \mathcal{F}_{32} \times \sigma \times \left(T_3^4 - T_2^4\right)}$$

L'équation du bilan thermique devient :

$$\boldsymbol{\Phi_{r,net:1\rightarrow 3} - \Phi_{r,net:3\rightarrow 2} = 0}$$

$$\boldsymbol{S_1 \times \mathcal{F}_{13} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_3^4\right) = S_3 \times \mathcal{F}_{32} \times \sigma \times \left(T_3^4 - T_2^4\right)} \quad ①$$

On pose:

$\boldsymbol{A = S_1 \times \mathcal{F}_{13}}$ et $\boldsymbol{B = S_3 \times \mathcal{F}_{32}}$

$$\boldsymbol{A = S_1 \times \mathcal{F}_{13} = \frac{\pi \times D_1 \times L}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{13}} + \frac{D_1}{D_3} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \approx 2,175 \times 10^{-3}\ m^2}$$

et

$$\boldsymbol{B = S_3 \times \mathcal{F}_{23} = \frac{\pi \times D_3 \times L}{\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{32}} + \frac{D_3}{D_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \approx 3,507 \times 10^{-3}\ m^2}$$

De l'équation ① on tire:

$$T_3^4 = \frac{A \times T_1^4 + B \times T_2^4}{A + B}$$

Calculons $T_{2,max}^4$

On a :

$$\Phi = \Phi_{r,net:1\to 3} = A \times \sigma \times \left(T_{1,max}^4 - \frac{A \times T_{1,max}^4 + B \times T_{2,max}^4}{A + B} \right)$$

D'où :

$$T_{2,max} = \left(T_{1,max}^4 - \frac{A + B}{A \times B \times \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \approx 704,3\ K = 431,3°C$$

On rappelle que :

Φ***=30 W*** représente le flux thermique dissipé, par effet ***Joule***, par le câble électrique ;

$T_{1,max}$***=800 K*** représente la température du câble.

On en déduit la valeur de la température de l'écran qui est, elle aussi, maximale:

$$T_{3,max} = \left(\frac{A \times T_{1,max}^4 + B \times T_{2,max}^4}{A + B} \right)^{\frac{1}{4}} = 735,7\ K$$

Exercice 15: Plafond rayonnant (Extrait du contrôle de transfert de chaleur GC1-2010/2011)

On s'intéresse à l'étude des échanges thermiques par rayonnement entre les parois d'une pièce d'un appartement. La pièce est rectangulaire de dimensions: longueur ***L=9 m***, largeur ***l=6 m*** et hauteur ***H=3 m***, et chauffée par son plafond, en plâtre d'émissivité $\varepsilon_1=0,90$, porté à $T_1=40°C$. Le plancher, en céramique d'émissivité $\varepsilon_2=0,95$, est porté à $T_2=25°C$. Le mur, donnant à l'extérieur (façade) de surface $S_3=L\times l$, est porté à $T_3=15°C$. Les autres murs sont portés à ***20°C***. Les quatre murs sont recouverts d'une couche de peinture verte d'émissivité $\varepsilon_3=0,70$.

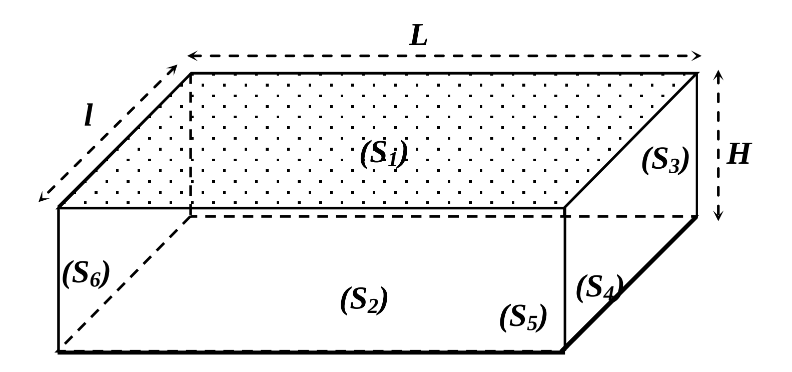
1- Calculer les facteurs de forme gris suivants: $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{14}$, $\mathcal{F}_{15}$ et $\mathcal{F}_{16}$.
2- Calculer le flux radiatif net $\Phi_{r,net1}$ transféré du plafond vers l'ensemble des murs et du plancher.

On donne les facteurs de forme géométriques pour les différents couples de surfaces rayonnantes:

$[S_i \to S_j]$	$[S_1 \to S_2]$	$[S_1 \to S_3 = S_5]$	$[S_1 \to S_4 = S_6]$
F_{ij}	$F_{12}=0,470$	$F_{13}=F_{15}=0,160$	$F_{14}=F_{16}=0,105$

$S_1=S_2=l\times L$; $S_3=S_5=L\times H$; $S_4=S_6=l\times H$.

La constante de ***Stefan-Boltzmann*** est $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$.



Solution :

- Plafond: surface grise ($S_1 = L \times l = 54\ m^2$, $T_1=40°C$ et $\varepsilon_1=0,9$).
- Plancher: surface grise ($S_2=S_1$, $T_2=25°C$ et $\varepsilon_2=0,95$).
- Mur donnant à l'extérieur (façade):surface grise ($S_3=L\times H=27\ m^2$, $T_3=15°C$ et $\varepsilon_3=0,7$).
- Murs en contact avec les autres pièces de l'appartement : surfaces grises ($S_5=S_3$, $S_4=S_6=l\times H=18\ m^2$, $T_4=T_5=T_6=20°C$ et $\varepsilon_4=\varepsilon_5=\varepsilon_6=\varepsilon_3=0,7$).

5. Facteurs de forme gris $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{14}$, $\mathcal{F}_{15}$ et $\mathcal{F}_{16}$.

- Facteur de forme gris relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_2)

$$\mathcal{F}_{12}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{12}}+\frac{S_1}{S_2}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-1\right)}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{12}}+\frac{1}{\varepsilon_2}-1}=0,4364$$

- Facteur de forme gris relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_3)

$$\mathcal{F}_{13}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{13}}+\frac{S_1}{S_3}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_3}-1\right)}=0,1385$$

- Facteur de forme gris relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_4)

$$\mathcal{F}_{14}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{14}}+\frac{S_1}{S_4}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_4}-1\right)}=0,092$$

- Facteur de forme gris relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_5)

$$\mathcal{F}_{15}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{15}}+\frac{S_1}{S_5}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_5}-1\right)}=0,1385$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{15}=\mathcal{F}_{13}$$

- Facteur de forme gris relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_6)

$$\mathcal{F}_{16}=\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}-1+\frac{1}{F_{16}}+\frac{S_1}{S_6}\times\left(\frac{1}{\varepsilon_6}-1\right)}=0,092$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F}_{16}=\mathcal{F}_{14}$$

6. Flux radiatif net $\Phi_{r,net1}$ transféré du plafond vers l'ensemble des murs et plancher.

$$\Phi_{r,net1}=\sum_{i=1}^{6}\Phi_{r,net:1\to i}$$

$$\Phi_{r,net1}=\sum_{i=1}^{6} S_1\times\mathcal{F}_{1i}\times\sigma\times\left(T_1^4-T_i^4\right)$$

Après développement et simplification, l'expression du flux devient :

$$\Phi_{r,net1}=S_1\times\sigma\times\left[\mathcal{F}_{12}\times\left(T_1^4-T_2^4\right)+\mathcal{F}_{13}\times\left(T_1^4-T_3^4\right)+(2\times\mathcal{F}_{14}+\mathcal{F}_{13})\times\left(T_1^4-T_4^4\right)\right]$$

$$\Phi_{r,net1}=5640\ W$$

***Exercice 16**: Etude d'une patinoire (Extrait de TD de transfert de chaleur GC1-2011/2012)*

Les architectes savent bien que le plafond d'une piste de patinage sur glace doit avoir une réflectivité (ρ) élevée. Sinon, il risque de se former de la condensation sur le plafond, et de l'eau peut tomber goutte à goutte sur la glace, provoquant des bosses sur la piste. La condensation se produit sur le plafond lorsque la température de sa surface descend en dessous du point de rosée de l'air de la patinoire.

On se propose d'effectuer une analyse afin de déterminer l'effet de l'émissivité du plafond sur sa température et donc sa tendance à la condensation.

La patinoire a une forme globalement cylindrique. La piste a un diamètre ***D=50 m*** et une hauteur ***L=10 m***. La température de la glace est $T_2=-5°C$ et celle des murs est $T_3=15°C$. La température de l'air de la patinoire est $T_i=15°C$, son humidité relative est de ***70%***. L'échange de transfert de chaleur par convection au niveau de la surface du plafond est $h_i=5\ W/m^2.°C$. L'épaisseur et la conductivité de la couche isolante du plafond sont respectivement $e_1= 30\ cm$ et $\lambda_1=0.035\ W/m.°C$.
La température de l'air à l'extérieur est $T_e=-5°C$ et le coefficient de transfert de chaleur est $h_e=100\ W/m^2.°C$.
On suppose que le plafond est une surface grise d'émissivité ε_1 et que les murs et la glace sont assimilés à des corps noirs ($\varepsilon_2=\varepsilon_3=1$).
La température de rosée de l'air correspondant aux conditions indiquées (***70%*** d'humidité à ***15°C*** sous pression atmosphérique) est $T_r=9,4°C$.

1- Effectuer un bilan énergétique sur le plafond.

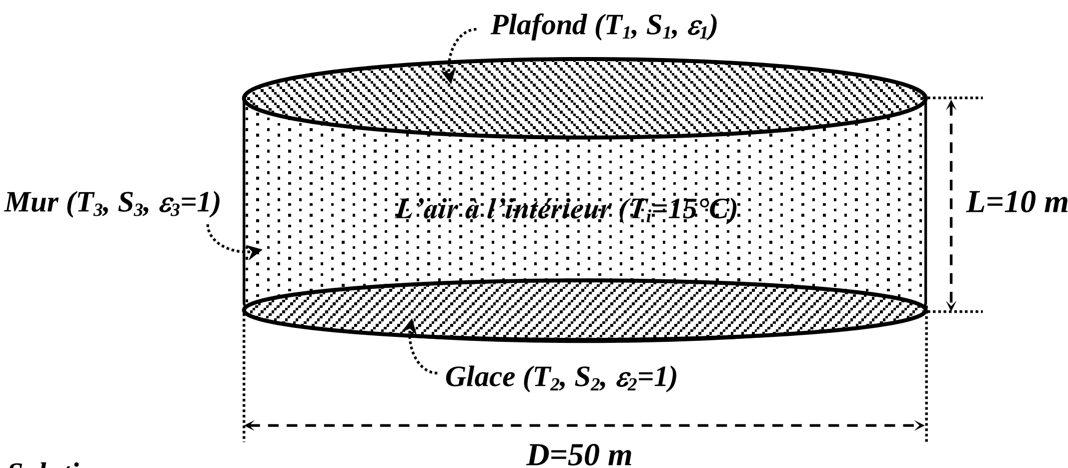
2- On suppose que le plafond a une émissivité $\varepsilon_1=0,05$ (panneaux très réfléchissants), calculer la température T_1 du plafond. Va-t-on avoir de la condensation?

3- On suppose que le plafond a une émissivité $\varepsilon'_1=0,94$ (panneaux peints faiblement réfléchissants), calculer la température T'_1 du plafond. Va-t-on avoir de la condensation?

4- On double l'épaisseur de l'isolation du plafond $e'_1=60\ cm$. Recalculer la température du plafond pour chacune des émissivités ε_1 et ε'_1. Conclure.

On donne:

- $F_{12}=0,67$: facteur de forme géométrique relatif au couple de surfaces rayonnantes (S_1,S_2);
- $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K$: constante de ***Stefan-Boltzmann***.



Solution:

Définition de ''point de rosée''
Le point de rosée de l'air est la température à laquelle la vapeur d'eau, contenue dans l'air, commence à se condenser. Ce phénomène physique est dépendant de la pression, de l'hygrométrie et de la température.

- *Patinoire : cylindre creux de diamètre **D=50 m** et de longueur **L=10m**.*
- *Plafond: base du cylindre (surface grise:* $S_1=\frac{\pi.D^2}{4}$, T_1*=? et* ε_1*).*
- *Glace (plancher): base du cylindre (surface noire:* $S_2=S_1$, $T_2=-5°C$ *et* $\varepsilon_2=1$*).*
- *Murs : surface latérale du cylindre (surface noire:* $S_3=\pi\times D\times L$, $T_3=15°C$ *et* $\varepsilon_3=1$*).*

- Plafond : couche isolante ($e_1=30\ cm$ et $\lambda_1=0,035\ W/m.°C$).
- L'air à l'intérieur de la patinoire ($T_i=15°C$ et $h_i=5\ W/m^2.°C$).
- L'air à l'extérieur de la patinoire ($T_e=-5°C$ et $h_e=100\ W/m^2.°C$).

La température de rosée de l'air T_r*, mesurée dans les conditions* T_i**=15°C**, p_i**= 1 bar** *et* **humidité=70%**, *vaut* **9,4°C**.

La température T_1 *du plafond doit avoir une valeur comprise entre celle de l'air à l'extérieur (*T_e**=-5°C***) et celle de l'air à l'intérieur (*T_i**=15°C***).*

1. Bilan énergétique sur le plafond *:*

Le bilan énergétique s'écrit, littéralement, sous la forme:

Gains- Pertes+Production (ou consommation)=Accumulation

Dans le milieu considéré (plafond), il n'y a pas de production (consommation) ni d'accumulation d'énergie. Ainsi, le bilan énergétique se réduit à :

Gains- Pertes=0

- ***Gains:***

Le plafond reçoit :

- un flux de chaleur par convection $\Phi_{cv,i}$ de la part de l'air intérieur*:*

$$\Phi_{cv,i} = h_i \times S_1 \times (T_i - T_1)$$

- un flux de chaleur par rayonnement (flux radiatif net) $\Phi_{r,net:2\to1}$ *de la part de la glace (plancher):*

$$\Phi_{r,net:2\to1} = S_2 \times \mathcal{F}_{21} \times \sigma \times \left(T_2^4 - T_1^4\right)$$

- un flux de chaleur par rayonnement (flux radiatif net*)* $\Phi_{r,net:3\to1}$ *de la part des murs:*

$$\Phi_{r,net:3\to1} = S_3 \times \mathcal{F}_{31} \times \sigma \times \left(T_3^4 - T_1^4\right)$$

Notons Φ_1 les gains en énergie *:*

$$\Phi_1 = \Phi_{CV,i} + \Phi_{r,net:2\to1} + \Phi_{r,net:3\to1}$$

$$\Phi_1 = h_i \times S_1 \times (T_i - T_1) + S_2 \times \mathcal{F}_{21} \times \sigma \times \left(T_2^4 - T_1^4\right) + S_3 \times \mathcal{F}_{31} \times \sigma \times \left(T_3^4 - T_1^4\right)$$

$$\Phi_1 = h_i \times S_1 \times (T_i - T_1) - \sigma \times ((S_2 \times \mathcal{F}_{21}) + (S_3 \times \mathcal{F}_{31})) \times T_1^4 + \sigma \times ((S_2 \times \mathcal{F}_{21} \times T_2^4) + (S_3 \times \mathcal{F}_{31} \times T_3^4)) \quad ①$$

Avec:

$$\mathcal{F}_{21} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 + \frac{1}{F_{21}} + \frac{S_2}{S_1} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{F_{21}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1}$$

F_{21} est le facteur de forme géométrique : fraction du rayonnement émis par la surface S_2 dans toutes les directions qui frappent la surface S_1.

D'après la règle de réciprocité, on a :

$$S_2 \times F_{21} = S_1 \times F_{12}$$

Comme $S_2 = S_1$ donc $F_{21} = F_{12} = 0,67$

$$\mathcal{F}_{31} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 + \frac{1}{F_{31}} + \frac{S_3}{S_1} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{F_{31}} + \frac{S_3}{S_1} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)}$$

F_{31} s'obtient en appliquant la règle de complémentarité à la surface S_1.

$$\sum_{i=1}^{3} F_{1j} = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_{11}}_{=0} + F_{12} + F_{13} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{13} = 1 - F_{12}$$

D'après la règle de réciprocité, on a :

$$F_{31} = \frac{S_1}{S_3} \times F_{13} = \frac{D}{4 \times L} \times (1 - F_{12}) = 0,4125$$

- ***Pertes:***

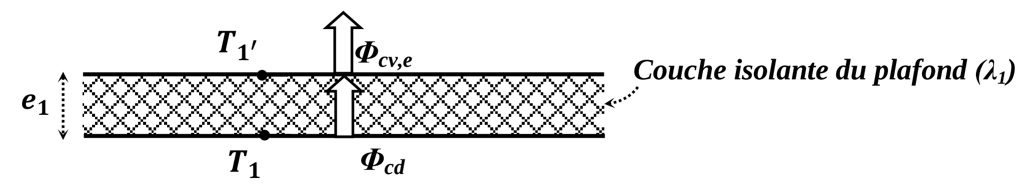
Le plafond perd de la chaleur qui s'échappe vers l'extérieur par conduction à travers la couche isolante, puis par convection avec l'air à l'extérieur :

Notons Φ_2 les gains en énergie *:*

$$\Phi_2 = \Phi_{cd} = \Phi_{cv,e}$$

$$\Phi_2 = S_1 \times \lambda_1 \times \frac{T_1 - T_{1'}}{e_1} = S_1 \times h_e \times (T_{1'} - T_e) = \frac{T_1 - T_e}{\frac{e_1}{S_1 \times \lambda_1} + \frac{1}{S_1 \times h_e}}$$

②



L'équation du bilan énergétique s'écrit :

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

et devient, après développement et simplification:

$$A \times T_1^4 + B \times T_1 = C \qquad ③$$

avec:

$$A = -\sigma \times ((S_2 \times \mathcal{F}_{21}) + (S_3 \times \mathcal{F}_{31})) = 1,113 \times 10^{-4} \times \mathcal{F}_{21} + 0,891 \times 10^{-4} \times \mathcal{F}_{31}$$

$$B = S_1 \times h_i + \frac{1}{\frac{e_1}{\lambda_1 \times S_1} + \frac{1}{S_1 \times h_e}} = 10046\ W/K$$

$$C = S_1 \times h_i \times T_i + \frac{T_e}{\frac{e_1}{\lambda_1 \times S_1} + \frac{1}{S_1 \times h_e}} + \sigma \times ((S_2 \times \mathcal{F}_{21} \times T_2^4) + (S_3 \times \mathcal{F}_{31} \times T_3^4)) = 2888754 + 574318 \times \mathcal{F}_{21} + 612735 \times \mathcal{F}_{31}$$

Cette équation peut également être écrite comme suit :

$$-A' \times T_1^4 + C' = T_1 \qquad ④$$

Avec :

$$\begin{cases} A' = \dfrac{A}{B} \\ C' = \dfrac{C}{B} \end{cases}$$

2. Cas où le plafond a une émissivité $\varepsilon_1 = 0,05$ (panneaux très réfléchissants)

Si $\varepsilon_1 = 0,05$ alors :

$$\mathcal{F}_{21} = \frac{1}{\frac{1}{F_{21}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} = 0,049$$

$$\mathcal{F}_{31} = \frac{1}{\frac{1}{F_{31}} + \frac{S_3}{S_1} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{F_{31}} + \frac{4 \times L}{D} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = 0,057$$

Il en découle que:

$$\begin{cases} A = 1053 \times 10^{-8} \quad W/K^4 \\ B = 10046 \quad W/K \\ C = 2951821 \quad W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = 1,05 \times 10^{-9} \ K^{-3} \\ C' = 294 \ K \end{cases}$$

L'équation ④ est équivalente à :

$$G(T_1) = F(T_1)$$

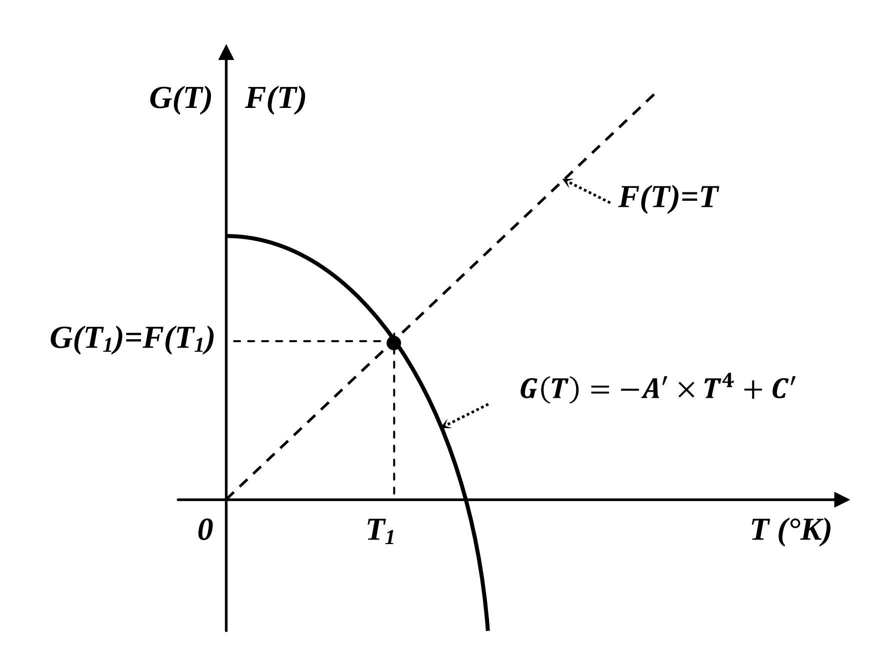
Avec :

$$\begin{cases} G(T_1) = -A' \times T_1^4 + C' \\ F(T_1) = T_1 \end{cases}$$

La résolution graphique de cette équation conduit à la solution suivante:

$$T_1 = 286,9 \ K = 13,9°C$$

On remarque que $T_1 > T_r = 9,4°C$, il n'y a donc pas condensation de la vapeur d'eau contenue dans l'air à l'intérieur de la patinoire.



3. Cas où le plafond a une émissivité $\varepsilon_1=0,94$ (panneaux peints faiblement réfléchissants)
Si $\varepsilon_1=0,94$ alors :

$$\mathcal{F}_{21} = \frac{1}{\frac{1}{F_{21}} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} = 0,6425$$

$$\mathcal{F}_{31} = \frac{1}{\frac{1}{F_{31}} + \frac{S_3}{S_1} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{F_{31}} + \frac{4 \times L}{D} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)} = 0,404$$

Il en découle que:

$$\begin{cases} A = 10751 \times 10^{-8} \quad W/K^4 \\ B = 10046 \quad W/K \\ C = 3505298 \quad W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' = 1,07 \times 10^{-8} \ K^{-3} \\ C' = 349 \ K \end{cases}$$

L'équation ④ est équivalente à :

$$G(T_1) = F(T_1)$$

Avec :

$$\begin{cases} G(T_1) = -A' \times T_1^4 + C' \\ F(T_1) = T_1 \end{cases}$$

La résolution graphique de cette équation conduit à la solution suivante:

$$\boldsymbol{T_1 = 281,66\ K = 8,66°C}$$

On remarque que $\boldsymbol{T_1 < T_r = 9,4°C}$, il y a donc condensation de la vapeur d'eau, contenue dans l'air, à l'intérieur de la patinoire.

4. Si on double l'épaisseur de l'isolation du plafond ***e'$_1$=60 cm***, on obtient les résultats suivants :

- Cas où ***ε_1=0,05***:

$$\begin{cases} A' = 1,0604 \times 10^{-9}\ K^{-3} \\ C' = 294\ K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = 283,8\ K = 13,8°C > T_r$$

- Cas où ***ε_1=0,94:***

$$\begin{cases} A' = 10,825 \times 10^{-9}\ K^{-3} \\ C' = 350\ K \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad T_1 = 281,77\ K = 8,77°C < T_r$$

C/G: Pour éviter la condensation de la vapeur d'eau, présente dans l'air, au niveau du plafond il faut que la surface de ce dernier soit fortement réfléchissante (***ε_1*** très faible).

III. Conduction thermique

III.1. Isolation thermique (résistances thermiques et structures composites)

Exercice 17:

Un mur en béton plein (***λ=1,75 W/m.°C***) de ***20 cm*** d'épaisseur et de ***18 m^2*** de surface (***figure 1***). Les ambiances interne et externe sont caractérisées respectivement par les températures ***T_i=30°C*** et ***T_e=44,5°C*** et par les coefficients d'échange convectif ***h_i=10 W/m^2.°C*** et ***h_e=16 W/m^2.°C***. Calculer le flux traversant le mur ***Φ_0***, en déduire les températures ***T_{pi}*** et ***T_{pe}*** sur les surfaces frontières de ce mur.

Pour réduire le flux thermique traversant ce mur, un bureau d'études prévoit d'y coller une plaque de polystyrène expansé (***λ_1=0,032 W/m.°C***) et une plaque de plâtre (***λ_2=0,35 W/m.°C***) de ***1 cm*** d'épaisseur (***figure 2***). Quelle épaisseur de la plaque de polystyrène faudrait-il choisir pour que la température de l'ambiance interne ***T_i*** soit égale à ***23°C*** et que le flux traversant le mur soit égal à celui qu'on obtiendrait si ce mur était construit en béton cellulaire (***λ=0,14 W/m.°C***)? En déduire les nouvelles valeurs de ***T_{pi}*** et ***T_{pe}***.

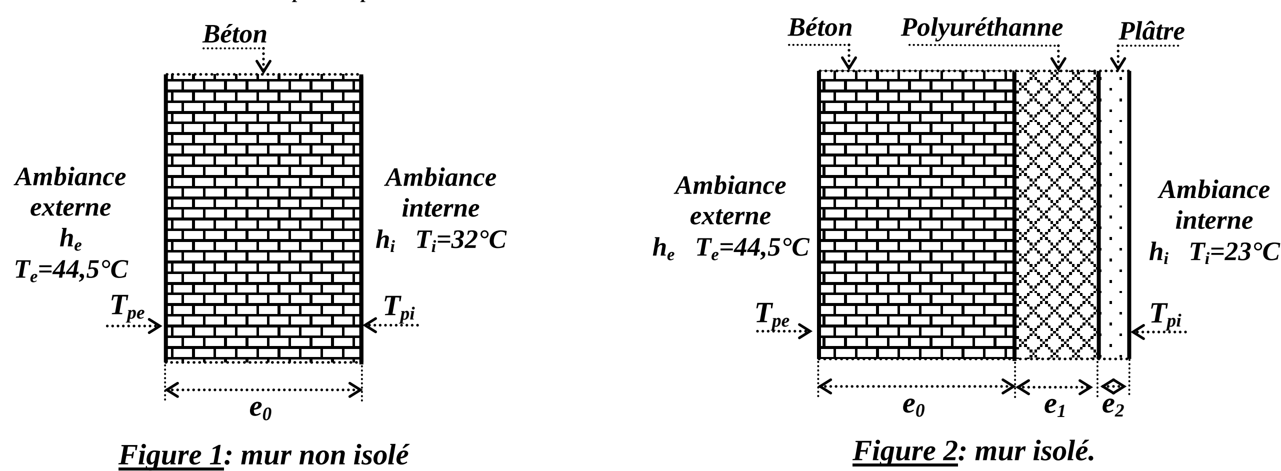
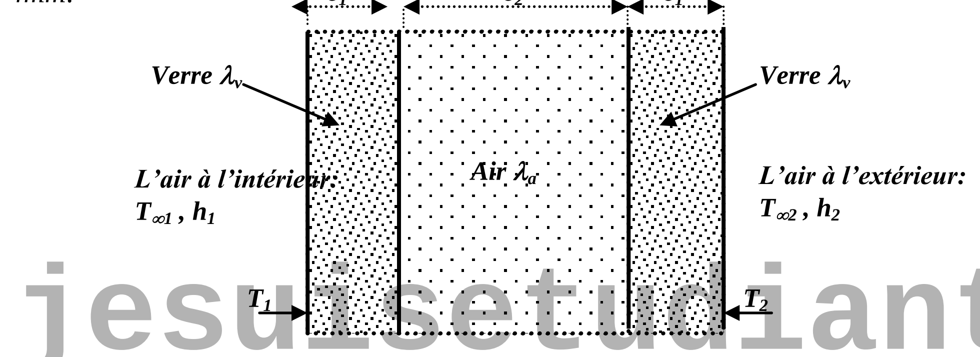


Figure 1: mur non isolé ***Figure 2: mur isolé.***

Exercice 18:

Un double vitrage est constitué de deux plaques de verre séparées par une couche d'air immobile. L'épaisseur de chaque vitre est *e_1=4 mm* et celle de la couche d'air est de *e_2=12mm*. La conductivité thermique du verre est *λ_v=0,7 W/m.°C* et celle de l'air est *λ_a=0,024 W/m.°C*. Le coefficient d'échange thermique par convection entre la plaque et l'air environnant à l'intérieur (*$T_{\infty1}$=25°C*) est *h_1=10Kcal/h.m^2.°C*. Le coefficient d'échange thermique par convection entre la plaque et l'air environnant à l'extérieur (*$T_{\infty2}$=38°C*) est *h_2=20Kcal/h.m^2.°C*. L'écart de température entre les faces extrêmes du vitrage est *ΔT=10°C*.

1- Calculer les différentes résistances thermiques rencontrées par le flux.
2- Calculer les pertes thermiques par *m^2*.
3- Faire un schéma de la paroi du vitrage illustrant les profils de température et les différentes résistances thermiques rencontrées par le flux.
4- Comparer ces pertes à celles qui seraient obtenues avec une seule vitre d'épaisseur égale à *4mm*.



Solution :

1- La densité de flux thermique traversant le double vitrage s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_{\infty 2} - T_2}{R_{cv2}} = \frac{T_2 - T_2^{'}}{R_{cd/ver}} = \frac{T_2^{'} - T_1^{'}}{R_{cd/air}} = \frac{T_1^{'} - T_1}{R_{cd/ver}} = \frac{T_1 - T_{\infty 1}}{R_{cv1}} = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}^{'}}{R_{th/eq}}$$

Il s'ensuit que le flux rencontre successivement :

- la résistance thermique de convection du côté de la vitre (2):

$$R_{cv2} = \frac{1}{h_2} \qquad \text{A.N. : } \quad R_{cv2} \; ; \; 43 \times 10^{-3} \; m^2.°C/W$$

- la résistance thermique de conduction de la vitre (2):

$$R_{cd/ver} = \frac{e_1}{\lambda_v} \qquad \text{A.N.: } \quad R_{cd/ver} \; ; \; 5,7 \times 10^{-3} \text{ m}^2.°\text{C/W}$$

- la résistance thermique de conduction de l'air:

$$R_{cd/air} = \frac{e_2}{\lambda_a} \qquad \text{A.N.: } \quad R_{cd/air} \; ; \; 500 \times 10^{-3} \text{ m}^2.°\text{C/W}$$

- la résistance thermique de conduction de la vitre (1):

$$R_{cd/ver} = \frac{e_1}{\lambda_v} \qquad \text{A.N.: } \quad R_{cd/ver} \; ; \; 5,7 \times 10^{-3} \text{ m}^2.°\text{C/W}$$

- la résistance thermique de convection du côté de la vitre (1):

$$R_{cv1} = \frac{1}{h_1} \qquad \text{A.N.: } \quad R_{cv1} \; ; \; 86 \times 10^{-3} \text{ m}^2.°\text{C/W}$$

La résistance thermique équivalente est :

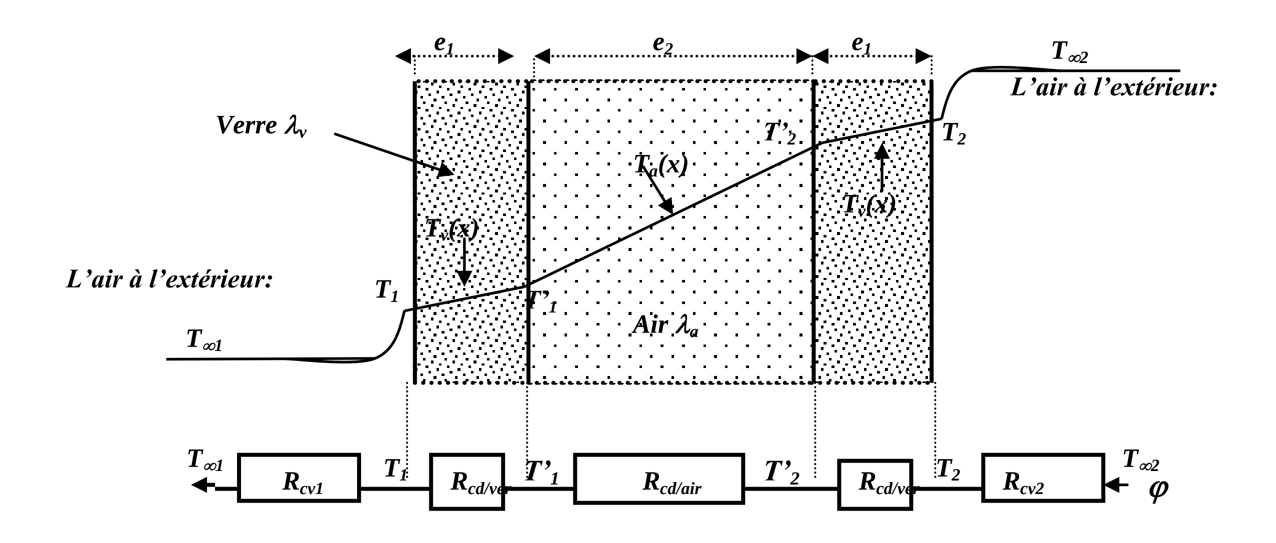
$$R_{th/eq} = R_{cv1} + 2R_{cd/ver} + R_{cd/air} + R_{cv2} \qquad \text{A.N.: } \quad R_{th/eq} \; ; \; 640,4 \times 10^{-3} \; m^2.°C/W$$

2- Densité de flux thermique :

On a :

$$\varphi = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{R_{th/eq}} \qquad \text{A.N.: } \quad \varphi \; ; \; 20,3 \; W/m^2$$

3- Schéma illustratif :



- Calcul des pentes des profils de température :
  - Pour le verre :

$$P_v = -\frac{\varphi}{\lambda_v} \;;\; -29\ °C/m$$

  - Pour l'air :

$$P_a = -\frac{\varphi}{\lambda_a} \;;\; -846\ °C/m$$

On déduit du schéma électrique les températures sur les surfaces de séparation :
On a :

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{T_{\infty 2} - T_2}{R_{cv2}} \\ \Delta T = T_2 - T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = T_{\infty 2} - \varphi R_{cv2} \\ T_1 = T_2 - \Delta T_1 \end{cases}$$

A.N. :

$$\begin{cases} T_2 \;;\; 37{,}13\ °C \\ T_1 \;;\; 26{,}75\ °C \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{T_2 - T_2^{'}}{R_{cd/ver}} \\ \varphi = \dfrac{T_1^{'} - T_1}{R_{cd/ver}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2^{'} = T_2 - \varphi R_{cd/ver} \\ T_1^{'} = T_1 + \varphi R_{cd/ver} \end{cases}$$

A.N. :

$$\begin{cases} T_2^{'} \;;\; 37\ °C \\ T_1^{'} \;;\; 26{,}86\ °C \end{cases}$$

4- La densité de flux thermique traversant une seule vitre d'épaisseur e_1 est :

$$\varphi' = \frac{T_{\infty 2} - T_{\infty 1}}{R_{cv1} + R_{cd/ver} + R_{cv2}}$$

A.N :

$$\varphi' \;;\; 96{,}5\ W/m^2$$

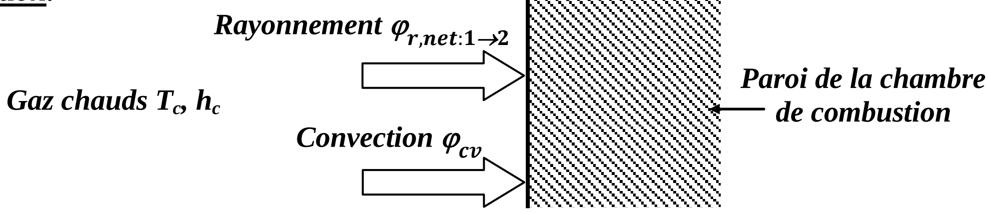
$$\varphi' > \varphi$$

Conclusion:
Le double vitrage nous a permis de réaliser une bonne isolation thermique avec une réduction notable du flux thermique à travers les vitres.

***Exercice 19**: (TD de génie des procédés 2008/2009)*
La paroi intérieure d'une chambre de combustion reçoit ***163000 Kcal/h.m²*** par rayonnement à partir d'un gaz à ***2760°C***. Le coefficient d'échange thermique par convection entre le gaz et la paroi est ***122 Kcal/h.m².°C***. Sachant que la température de la paroi intérieure de la chambre de combustion est égale à ***538°C***.

1- Quels sont les modes de transferts thermiques en présence.
2- Calculer la résistance thermique, par unité de surface de la paroi, relative à chaque mode de transfert de chaleur. En déduire la résistance thermique totale.
3- Calculer le flux thermique échangé entre le gaz et la paroi.
4- Calculer le coefficient d'échange de chaleur par rayonnement.

Solution:



1- Les modes de transfert de chaleur en présence sont le rayonnement et la convection (fluide en contact avec une paroi solide).

La densité de flux thermique transférée par convection des gaz chauds vers la paroi interne de la chambre de combustion se calcule en appliquant la loi de Newton :

$$\varphi_{cv} = h_c \times (T_C - T_p)$$

La densité de flux thermique transférée par rayonnement des gaz chauds vers la paroi interne de la chambre de combustion se calcule en appliquant la relation suivante:

$$\varphi_{r,net:1\to2} = \frac{\Phi_{r,net:1\to2}}{S_1}$$

$$\varphi_{r,net:1\to2} = F_{12} \times \sigma(T_c^4 - T_p^4)$$

En introduisant le coefficient d'échange de chaleur par rayonnement h_r, la densité de flux thermique devient:

$$\varphi_{r,net:1\to2} = h_r \times (T_c - T_p)$$

2- Résistances thermiques, par unité de surface de la paroi, relative à la convection r_{cv} et au rayonnement r_r:

➔ Résistance thermique de convection:

$$r_{cv} = S \times R_{cv} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{cv}} \quad \Rightarrow \quad r_{cv} = \frac{1}{h_c}$$

$$r_{cv} \approx 8,197 \times 10^{-3}\ m^2.°C.h/Kcal$$

résistance caractérisant l'échange de chaleur par convection entre les gaz chauds et l'unité de surface de la paroi de la chambre de combustion.

➔ Résistance thermique de rayonnement:

$$r_r = S \times R_r = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{r,net:1\to2}}$$

$$r_r \approx 13,632 \times 10^{-3}\ m^2.°C.h/Kcal$$

➔ Résistance thermique totale:

$$r_{th} = S \times R_{th} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{total}}$$

$$r_{th} = \frac{(T_c - T_p)}{\varphi_{cv} + \varphi_{r,net:1\to2}} = \frac{(T_c - T_p)}{\frac{(T_c - T_p)}{r_{cv}} + \frac{(T_c - T_p)}{r_r}}$$

$$r_{th} = \frac{1}{\frac{1}{r_{cv}} + \frac{1}{r_r}} = \frac{r_{cv} \times r_r}{r_{cv} + r_r} = r_{cv}//r_r$$

A.N.: $r_{th} = 5,12 \times 10^{-3}\ m^2.h/Kcal$

r_{th} est donc la résistance thermique équivalente aux résistances r_{cv} et r_r montées en parallèle.

Ces échanges de chaleur par rayonnement et par convection entre les gaz chauds et la paroi peuvent être représentés par le schéma électrique équivalent suivant:

$$\varphi_{tot} \; T_c \; r_r \; \varphi_{r,net:1\to2} \; r_{cv} \; \varphi_{cv} \; T_p \equiv \varphi_{tot} \; T_c \; r_{th} \; T_p$$

3- Flux total échangé entre les gaz chauds et la paroi:

$$\varphi_{tot} = \frac{T_c - T_p}{r_{th}} \approx 434 \times 10^3 \; Kcal/h.m^2$$

Le coefficient d'échange radiatif h_r se calcule comme suit:

$$\varphi_{r,net:1\to2} = h_r \times (T_c - T_p) \;\Rightarrow h_r = \frac{\varphi_{r,net:1\to2}}{(T_c - T_p)} \approx 73{,}36 \;\; Kcal/h.m^2.°C$$

Remarquons que le flux total φ_{tot} peut être écrit comme suit:

$$\varphi_{tot} = \varphi_{cv} + \varphi_{r,net:1\to2} = (h_c + h_r) \times (T_c - T_p) = h \times (T_c - T_p)$$

h est le coefficient global d'échange thermique entre les gaz et la paroi :

$$h = \approx 195{,}36 \; Kcal/h.m^2.°C$$

D'après le cours (chapitre *2*, pages ***7*** et ***8***), h_r peut être calculé, si l'on connaît tous les paramètres dont il dépend, en utilisant la formule:

$$h_r = 4\mathcal{F}_{12}\,\sigma \times \left(\frac{T_c + T_p}{2}\right)^3 \quad \text{si} \; \left(\left|T_c - T_p\right| \le 100°C\right)$$

$$h_r = \frac{\mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_c^4 - T_p^4\right)}{\left(T_c - T_p\right)} = \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_C^2 + T_p^2\right) \times \left(T_c + T_p\right) \quad \text{si} \; \left(\left|T_c - T_p\right| > 100°C\right)$$

Dans cet exercice, on a: $T_c - T_p = 2222°C$

Donc : $h_r = \mathcal{F}_{12} \times \sigma\left(T_C^2 + T_p^2\right) \times \left(T_c + T_p\right)$

On peut en tirer la valeur du facteur de forme gris $\mathcal{F}_{12} \approx 0{,}04$.

Exercice 20 :

Le mur d'un local est composé de l'intérieur vers l'extérieur (*figure 1*):

- d'un enduit plâtre ($\lambda_3 = 0{,}35$ *W/m.°C*) de *1,5 cm* d'épaisseur;
- d'une maçonnerie en béton plein ($\lambda_2 = 1{,}3$ *W/m.°C*) de *19 cm* d'épaisseur;
- d'un revêtement extérieur constitué par un enduit à base de ciment ($\lambda_1 = 1{,}16$ *W/m.°C*) de *2 cm* d'épaisseur.

Les coefficients d'échange thermique aux surfaces interne et externe du mur sont respectivement $h_i = 9{,}1$ $W/m^2.°C$ et $h_e = 16{,}7$ $W/m^2.°C$. La température de l'air à l'extérieur et celle de la surface frontière externe du mur sont respectivement $T_e = 40°C$ et $T_{Pe} = 39{,}4°C$.

1- Calculer la résistance thermique de conduction du mur r_{cd}, en déduire la résistance thermique globale r_{theq}.

2- Tracer le circuit thermique; en déduire le flux thermique traversant le mur et la température sur les différentes surfaces de séparation.

3- Représenter les profils de température. Conclure.

Pour limiter les échanges de chaleur par conduction à travers le mur, on procède à une isolation thermique de celui-ci.

A- <u>*Isolation thermique par l'intérieur*</u>:

Des panneaux de polyuréthane (λ_i=0,03 W/m.°C et e_i=5 cm) sont collés directement contre la face intérieure de la couche de béton, et sont ensuite protégés par une couche d'enduit plâtre (*figure 2*). On donne: T_e=40°C et T_{Pe}=39,4°C

Mêmes questions que pour le mur non isolé.

B- *Isolation thermique par l'extérieur*:

Des panneaux de polyuréthane (λ_i=0,03 W/m.°C et e_i=5 cm) sont collés directement contre la face extérieure de la couche de béton, et sont ensuite protégés par une couche d'enduit ciment (*figure 3*). On donne: T_e=40°C et T_{Pe}=39,4°C

Mêmes questions que pour le mur non isolé.

C- *Isolation thermique répartie:*

On remplace la maçonnerie en béton plein par une maçonnerie en béton cellulaire (λ_2=0,22 W/m.°C, e_2=19 cm). On donne: T_e=40°C et T_{Pe}=39,4°C (*figure 4*).

Mêmes questions que pour le mur non isolé.

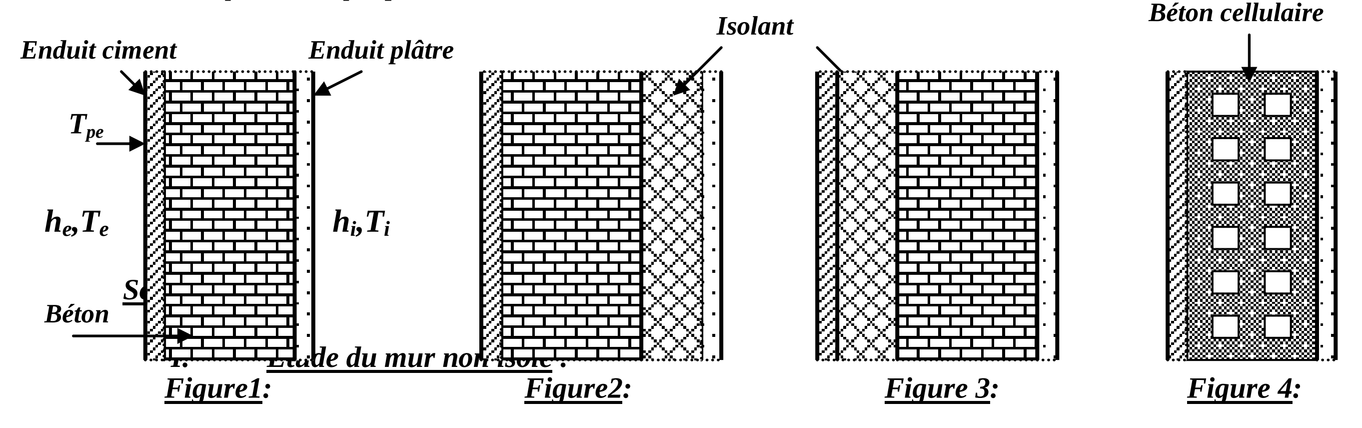
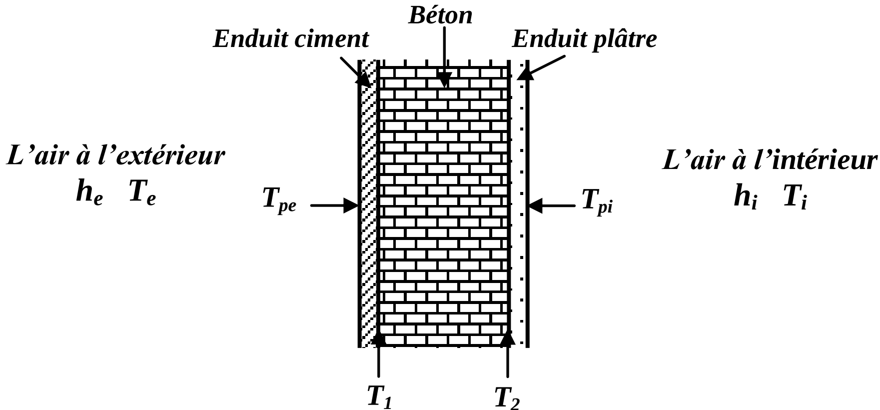


Figure1: **Figure2:** **Figure 3:** **Figure 4:**



1. Résistances thermiques :

- Résistance thermique de conduction, pour l'unité de surface, du mur non isolé composé de béton et de revêtements en enduits plâtre et ciment.

$$r_{cd} = \sum_{j=1}^{3} r_{cdj} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{e_j}{\lambda_j}\right) = 206,25 \times 10^{-3} \ m^2.°C/W$$

Où r_{cdj} est la résistance thermique de conduction de la couche de matériau de conductivité λ_j et d'épaisseur e_j.

- Résistance thermique global $r_{th,eq}$:

$$r_{th,eq} = r_i + r_{cd} + r_e = \frac{1}{h_i} + r_{cd} + \frac{1}{h_e} = 376,03 \times 10^{-3} \ m^2.°C/W$$

Où r_i et r_e sont les résistances thermiques de convection, pour l'unité de surface, respectivement du côté des ambiances interne et externe.

2. Circuits thermiques, densité de flux de chaleur $\boldsymbol{\varphi}$ et températures de l'ambiance interne $\boldsymbol{T_i}$, de la surface frontière interne $\boldsymbol{T_{pi}}$ et des surfaces de séparation $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$.

- Circuits thermiques:

T_e — r_e — T_{pe} — r_{cd1} — T_1 — r_{cd2} — T_2 — r_{cd3} — T_{pi} — r_i — T_i (φ)

⇕

T_e — r_e — T_{pe} — r_{cd} — T_{pi} — r_i — T_i (φ)

⇕

T_{pe} — $r_{th,eq}$ — T_{pi} (φ)

- Densité de flux de chaleur:

D'après le circuit, on a :

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{T_e - T_{pe}}{r_e} = 10,02\ W/m^2}$$

- Températures $\boldsymbol{T_i}$ $\boldsymbol{T_{pi}}$ $\boldsymbol{T_1}$ et $\boldsymbol{T_2}$:

D'après le circuit, on a :

$$\varphi = \frac{T_{pe} - T_1}{r_{cd1}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_1 = T_{pe} - r_{cd1} \times \varphi = 39,23°C}$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{r_{cd2}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_2 = T_1 - r_{cd2} \times \varphi = 37,76°C}$$

$$\varphi = \frac{T_2 - T_{pi}}{r_{cd3}} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_{pi} = T_2 - r_{cd3} \times \varphi = 37,33°C}$$

$$\varphi = \frac{T_{pi} - T_i}{r_i} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T_i = T_{pi} - r_i \times \varphi = 36,23°C}$$

3. Profils de température

- La distribution de température dans la couche d'enduit ciment $\boldsymbol{(\lambda_1, e_1)}$ est donnée par:

$$\boldsymbol{T(x) = -\frac{T_{pe} - T_1}{e_1}.x + T_{pe} = -\frac{\varphi}{\lambda_1}.x + T_{pe}}$$

(pour $\boldsymbol{0 \le x \le e_1}$)

- La distribution de température dans la couche de béton $\boldsymbol{(\lambda_2, e_2)}$ est donnée par:

$$\boldsymbol{T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{e_2}.(x - e_1) + T_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_2}.(x - e_1) + T_1}$$

(pour $\boldsymbol{e_1 \le x \le e_1 + e_2}$)

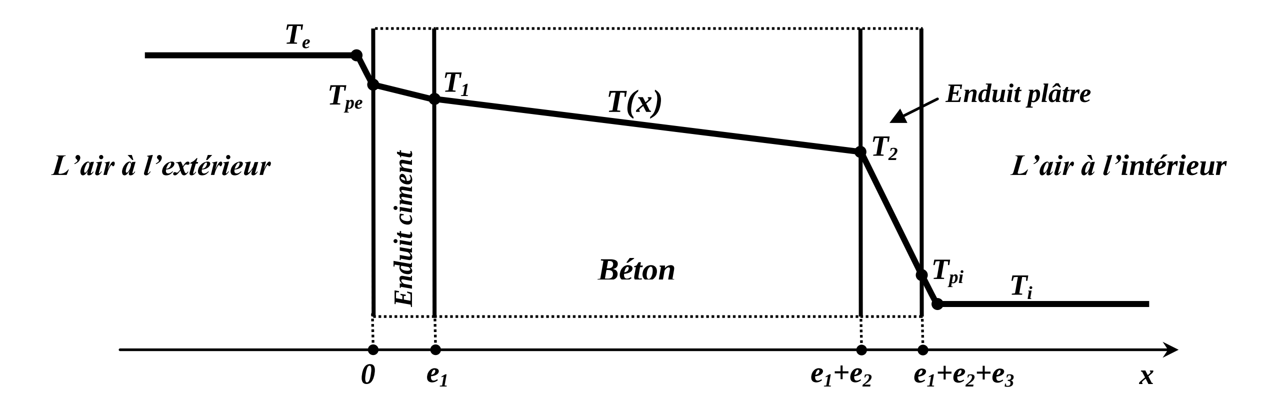
- La distribution de température dans la couche d'enduit plâtre $\boldsymbol{(\lambda_3, e_3)}$ est donnée par:

$$\boldsymbol{T(x) = -\frac{T_2 - T_{pi}}{e_3}.\big(x - (e_1 + e_2)\big) + T_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_3}.\big(x - (e_1 + e_2)\big) + T_2}$$

(pour $\boldsymbol{e_1 + e_2 \le x \le e_1 + e_2 + e_3}$)

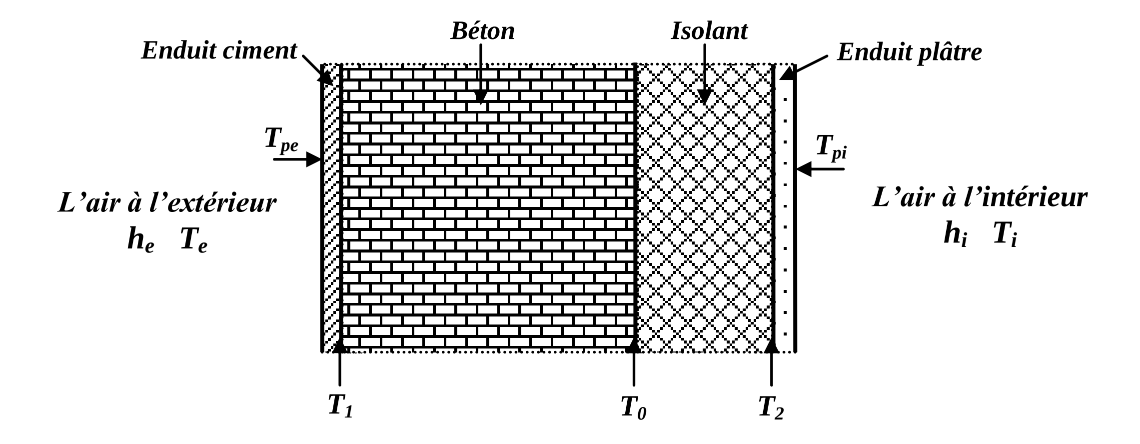
La courbe représentative de ***T(x)*** est une portion de droite de pente $P_j = -\frac{\varphi}{\lambda_j}$

- Pour l'enduit ciment, on a: $P_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_1} = -8{,}64\ °C/m$
- Pour le béton, on a: $P_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_2} = -7{,}71\ °C/m$
- Pour l'enduit plâtre, on a: $P_3 = -\frac{\varphi}{\lambda_3} = -28{,}63\ °C/m$



II. <u>Etude du mur isolé</u>:

A- Isolation thermique par l'intérieur



1. Résistances thermiques :

- Résistance thermique de conduction, pour l'unité de surface, du mur isolé composé de béton d'isolant et de revêtements en enduits plâtre et ciment.

$$\boldsymbol{r_{cd} = r_{cdi} + \sum_{j=1}^{3} r_{cdj} = \frac{e_i}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{e_j}{\lambda_j}\right) = 1872,92 \times 10^{-3}\ \ m^2.°C/W}$$

Où $r_{cdi} = \frac{e_i}{\lambda_i} = 1666{,}67\ \boldsymbol{m^2.°C/W}$ est la résistance thermique de conduction de la couche isolante.

- Résistance thermique global $\boldsymbol{r_{th,eq}}$:

$$\boldsymbol{r_{th,eq} = r_i + r_{cd} + r_e = \frac{1}{h_i} + r_{cd} + \frac{1}{h_e} = 2042,7 \times 10^{-3}\ \ m^2.°C/W}$$

2. Circuits thermiques, densité de flux de chaleur $\boldsymbol{\varphi}$ et températures de l'ambiance interne $\boldsymbol{T_i}$, de la surface frontière interne $\boldsymbol{T_{pi}}$ et des surfaces de séparation $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_0}$ et $\boldsymbol{T_2}$.

- Circuits thermiques:

T_e — r_e — T_{pe} — r_{cd1} — T_1 — r_{cd2} — T_0 — r_{cdi} — T_2 — r_{cd3} — T_{pi} — r_i — T_i ; φ

⇕

T_e — r_e — T_{pe} — r_{cd} — T_{pi} — r_i — T_i ; φ

⇕

T_{pe} — $r_{th,eq}$ — T_{pi} ; φ

- Densité de flux de chaleur:

D'après le circuit, on a :

$$\varphi = \frac{T_e - T_{pe}}{r_e} = 10,02\ W/m^2$$

- Températures T_i T_{pi}, T_1, T_0 et T_2:

D'après le circuit, on a:

$$\varphi = \frac{T_{pe} - T_1}{r_{cd1}} \Rightarrow T_1 = T_{pe} - r_{cd1} \times \varphi = 39,23°C$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_0}{r_{cd2}} \Rightarrow T_0 = T_1 - r_{cd2} \times \varphi = 37,76°C$$

$$\varphi = \frac{T_0 - T_2}{r_{cdi}} \Rightarrow T_2 = T_0 - r_{cdi} \times \varphi = 21,06°C$$

$$\varphi = \frac{T_2 - T_{pi}}{r_{cd3}} \Rightarrow T_{pi} = T_2 - r_{cd3} \times \varphi = 20,63°C$$

$$\varphi = \frac{T_{pi} - T_i}{r_i} \Rightarrow T_i = T_{pi} - r_i \times \varphi = 19,53°C$$

3. Profils de température :

- La distribution de température dans la couche d'enduit ciment **(λ_1, e_1)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_{pe} - T_1}{e_1}.x + T_{pe} = -\frac{\varphi}{\lambda_1}.x + T_{pe}$$

(pour $0 \le x \le e_1$)

- La distribution de température dans la couche de béton **(λ_2, e_2)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{e_2}.(x - e_1) + T_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_2}.(x - e_1) + T_1$$

(pour $e_1 \le x \le e_1 + e_2$)

- La distribution de température dans la couche isolante de polyuréthane **(λ_i, e_i)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_0 - T_2}{e_i}.\left(x - (e_1 + e_2)\right) + T_0 = -\frac{\varphi}{\lambda_i}.\left(x - (e_1 + e_2)\right) + T_0$$

(pour $e_1 + e_2 \le x \le e_1 + e_2 + e_i$)

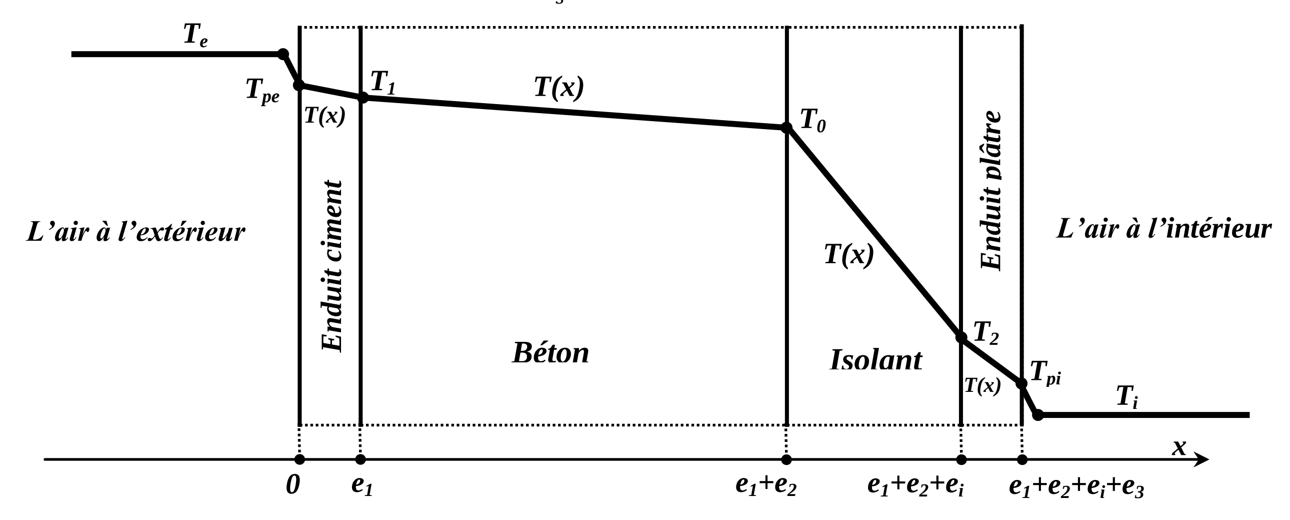
- La distribution de température dans la couche d'enduit plâtre **(λ_3, e_3)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_2 - T_{pi}}{e_3}.\left(x - (e_1 + e_2 + e_i)\right) + T_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_3}.\left(x - (e_1 + e_2 + e_i)\right) + T_2$$

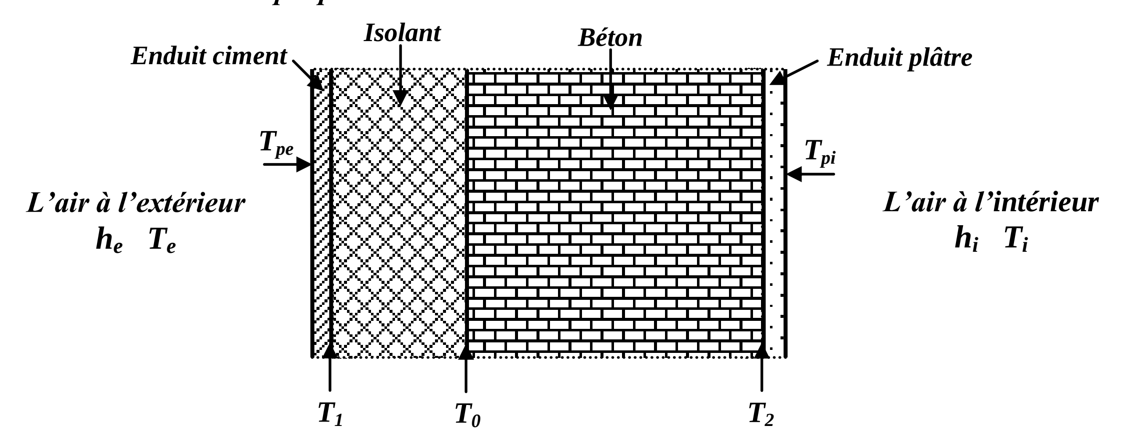
(pour $e_1 + e_2 + e_i \leq x \leq e_1 + e_2 + e_i + e_3$)

La courbe représentative de ***T(x)*** est une portion de droite de pente $P_j = -\frac{\varphi}{\lambda_j}$

- Pour l'enduit ciment, on a: $P_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_1} = -8{,}64\ °C/m$
- Pour le béton, on a: $P_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_2} = -7{,}71\ °C/m$
- Pour l'isolant (polyuréthane), on a: $P_i = -\frac{\varphi}{\lambda_i} = -334\ °C/m$
- Pour l'enduit plâtre, on a: $P_3 = -\frac{\varphi}{\lambda_3} = -28{,}63\ °C/m$



B- Isolation thermique par l'intérieur



4. Les résistances thermiques sont les mêmes que dans le cas d'une isolation par l'intérieur :

$$r_{cd} = r_{cdi} + \sum_{j=1}^{3} r_{cdj} = \frac{e_i}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{e_j}{\lambda_j}\right) = 1872{,}92 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$

$$r_{th,eq} = r_i + r_{cd} + r_e = \frac{1}{h_i} + r_{cd} + \frac{1}{h_e} = 2042{,}7 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$

5. Circuits thermiques, densité de flux de chaleur φ et températures de l'ambiance interne T_i, de la surface frontière interne T_{pi} et des surfaces de séparation T_1, T_0 et T_2.

- Circuits thermiques:

$$T_e \xrightarrow{\varphi} r_e \; T_{pe} \; r_{cd1} \; T_1 \; r_{cd2} \; T_0 \; r_{cdi} \; T_2 \; r_{cd3} \; T_{pi} \; r_i \; T_i$$

$$\Updownarrow$$

$$T_e \xrightarrow{\varphi} r_e \; T_{pe} \; r_{cd} \; T_{pi} \; r_i \; T_i$$

$$\Updownarrow$$

$$T_{pe} \xrightarrow{\varphi} r_{th,eq} \; T_{pi}$$

- Densité de flux de chaleur:

D'après le circuit, on a :

$$\varphi = \frac{T_e - T_{pe}}{r_e} = 10,02\ W/m^2$$

- Températures T_i T_{pi}, T_1, T_0 et T_2:

D'après le circuit, on a:

$$\varphi = \frac{T_{pe} - T_1}{r_{cd1}} \Rightarrow T_1 = T_{pe} - r_{cd1} \times \varphi = 39,23°C$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_0}{r_{cd2}} \Rightarrow T_0 = T_1 - r_{cd2} \times \varphi = 37,76°C$$

$$\varphi = \frac{T_0 - T_2}{r_{cdi}} \Rightarrow T_2 = T_0 - r_{cdi} \times \varphi = 21,06°C$$

$$\varphi = \frac{T_2 - T_{pi}}{r_{cd3}} \Rightarrow T_{pi} = T_2 - r_{cd3} \times \varphi = 20,63°C$$

$$\varphi = \frac{T_{pi} - T_i}{r_i} \Rightarrow T_i = T_{pi} - r_i \times \varphi = 19,53°C$$

6. Profils de température :

- La distribution de température dans la couche d'enduit ciment **(λ_1, e_1)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_{pe} - T_1}{e_1}.x + T_{pe} = -\frac{\varphi}{\lambda_1}.x + T_{pe}$$

(pour $0 \le x \le e_1$)

- La distribution de température dans la couche de béton **(λ_2, e_2)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{e_2}.(x - e_1) + T_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_2}.(x - e_1) + T_1$$

(pour $e_1 \le x \le e_1 + e_2$)

- La distribution de température dans la couche isolante de polyuréthane **(λ_i, e_i)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_0 - T_2}{e_i}.\big(x - (e_1 + e_2)\big) + T_0 = -\frac{\varphi}{\lambda_i}.\big(x - (e_1 + e_2)\big) + T_0$$

(pour $e_1 + e_2 \le x \le e_1 + e_2 + e_i$)

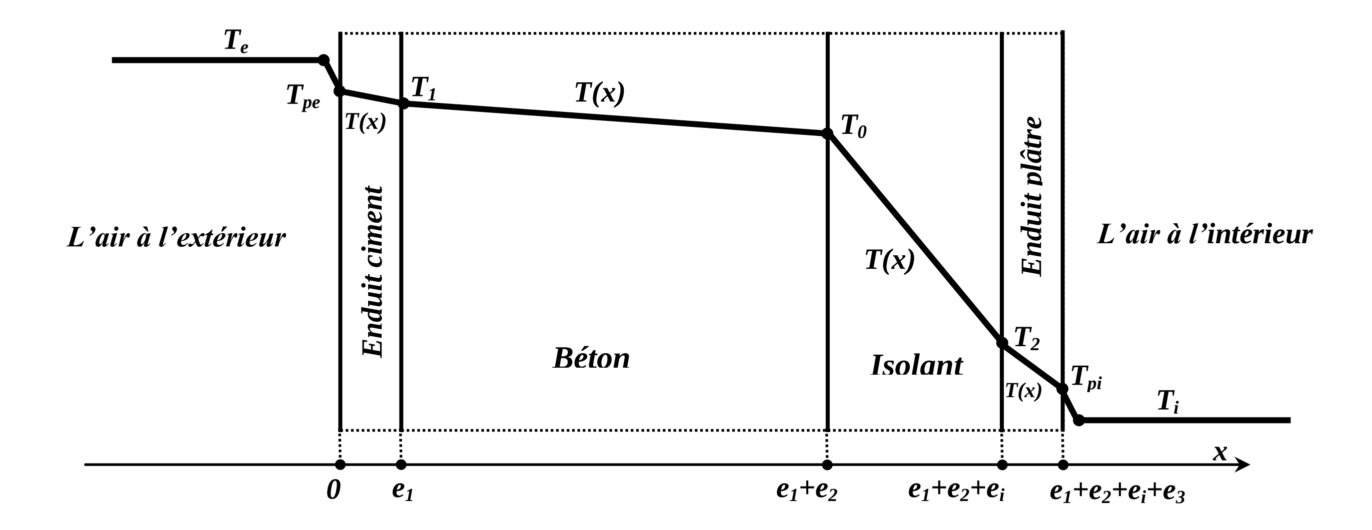
- La distribution de température dans la couche d'enduit plâtre **(λ_3, e_3)** est donnée par:

$$T(x) = -\frac{T_2 - T_{pi}}{e_3}.\left(x - (e_1 + e_2 + e_i)\right) + T_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_3}.\left(x - (e_1 + e_2 + e_i)\right) + T_2$$

(pour $e_1 + e_2 + e_i \leq x \leq e_1 + e_2 + e_i + e_3$)

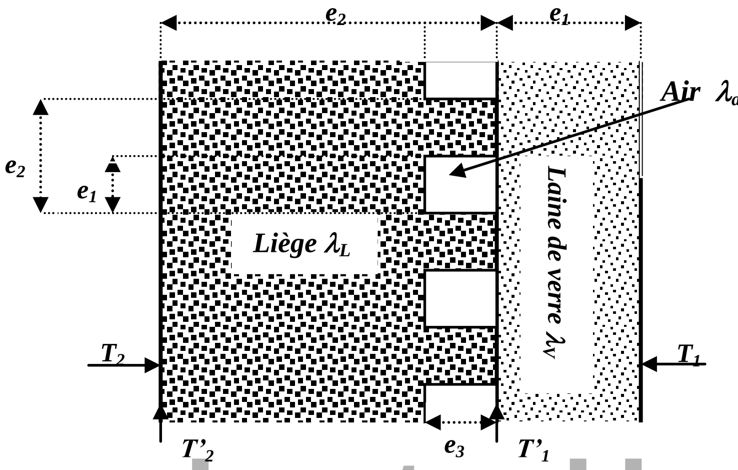
La courbe représentative de ***T(x)*** est une portion de droite de pente $P_j = -\frac{\varphi}{\lambda_j}$

- Pour l'enduit ciment, on a: $P_1 = -\frac{\varphi}{\lambda_1} = -8{,}64\ °C/m$
- Pour le béton, on a: $P_2 = -\frac{\varphi}{\lambda_2} = -7{,}71\ °C/m$
- Pour l'isolant (polyuréthane), on a: $P_i = -\frac{\varphi}{\lambda_i} = -334\ °C/m$
- Pour l'enduit plâtre, on a: $P_3 = -\frac{\varphi}{\lambda_3} = -28{,}63\ °C/m$



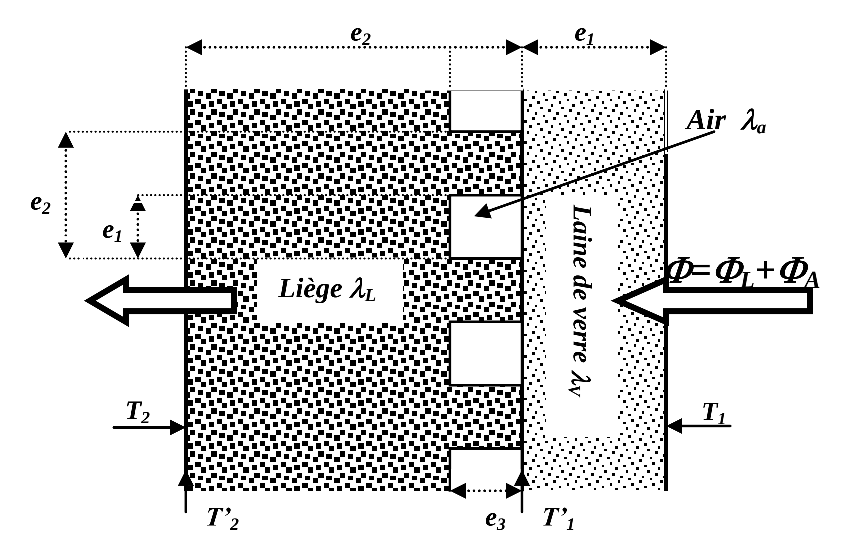
Exercice 21:

Un mur isolant composite est formé d'une couche de liège (***λ_L=0,037 kcal/h.m.°C***) et d'une couche de la laine de verre (***λ_V=0,0462 kcal/h.m.°C***) comme le montre la figure ci-dessous. Si les cavités sont remplies d'air atmosphérique (***λ_a=0,03 kcal/h.m.°C***), déterminer la résistance thermique totale par unité de surface du mur et comparer la avec celle d'un mur plein. On donne ***e_1=6mm***, ***e_2=12mm*** et ***e_3=4mm***. Sachant que les températures sur les parois interne T_1 et externe T_2 sont respectivement égales à ***20°C*** et ***10°C***, calculer le flux thermique traversant cette structure composite et comparer le à celui traversant un mur plein.



Solution:

Schéma descriptif



Le flux thermique traversant cette structure composite s'écrit :

$$\Phi = \Phi_L + \Phi_A$$

avec: Φ_L le flux thermique traversant les aspérités de liège;
Φ_A le flux thermique traversant les cavités d'air.

Ou encore en utilisant la densité de flux thermique :

$$\varphi = \varphi_L + \varphi_A$$

On a:

$$\varphi = \frac{T_1 - T'_1}{r_V} = \frac{T'_1 - T'_2}{r_{A/L}} = \frac{T'_2 - T_2}{r_L} = \frac{T_1 - T_2}{r_V + r_L + r_{A/L}} = \frac{T_1 - T_2}{r_{Th}}$$

avec:

$$r_V = \frac{e_1}{\lambda_V}; \quad r_L = \frac{(e_2 - e_3)}{\lambda_L}; \quad r_{A/L} = \frac{2e_3}{\lambda_A + \lambda_L}$$

$$\text{et} \quad r_{Th} = \frac{e_1}{\lambda_V} + \frac{(e_2 - e_3)}{\lambda_L} + \frac{2e_3}{\lambda_A + \lambda_L}$$

A.N.: $\varphi \approx 21{,}5$ *Kcal/h.m*^{2}
$r_{Th} \approx 465{,}5 \times 10^{-3}$ *m*^{2}*.°C.h/Kcal.*

Pour un mur plein, on a:

$$\varphi' = \frac{T_1 - T_2}{r'_{Th}} \qquad \text{avec} \quad r'_{Th} = \frac{e_1}{\lambda_V} + \frac{e_2}{\lambda_L}$$

A.N.: $\varphi' \approx 22$ *Kcal/h.m*^{2}
$r_{Th} \approx 454{,}2 \times 10^{-3}$ *m*^{2}*.°C.h/Kcal.*

Conclusion:

La présence de cavités d'air a pour effet d'augmenter la résistance thermique de la structure composite et, par conséquence, de réduire le flux thermique tranversant cette structure.

***Exercice 22**: Isolation d'un mur (Contrôle de rattrapage de transfert de chaleur GC1-2010/2011)*

La façade d'un local, de longueur ***L=8 m*** et hauteur ***H=3 m***, est constituée d'un mur en béton cellulaire percé d'une porte en bois de ***3,6 m²*** de surface (*figure 1*). L'air à l'intérieur du local est à la

température T_i=20°C, l'air à l'extérieur est à T_e=38°C. Les coefficients d'échange de chaleur par convection (rayonnement) sont: h_i=9,1 W/m^2.°C et h_e=16,7 W/m^2.°C.

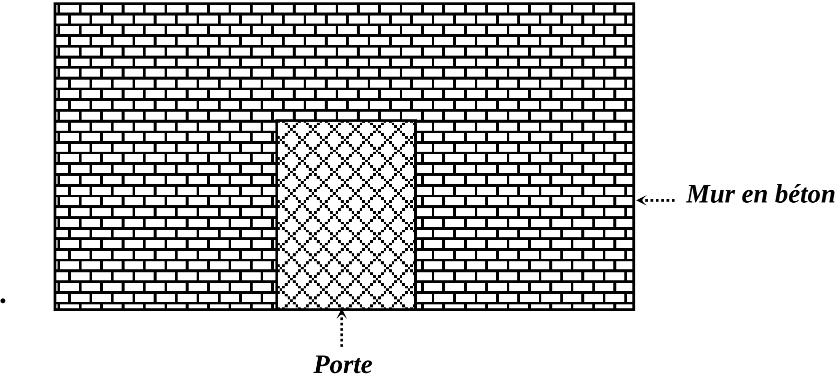


***Figure 1**: Façade.*

A. Le mur est constitué successivement, de l'intérieur vers l'extérieur, d'enduit plâtre, de béton cellulaire et d'enduit ciment *(figure 2-a)*. La porte en bois est d'épaisseur e_b=4 cm et de conductivité λ_b=0,23 W/m.°C *(figure 2-b)*.

Matériau	*Enduit plâtre*	*Béton cellulaire*	*Enduit ciment*
Epaisseur e_i (cm)	e_1=1,5	e_2=15	e_3=2
Conductivité λ_i (W/m.°C)	λ_1=0,35	λ_2=0,16	λ_3=1,16

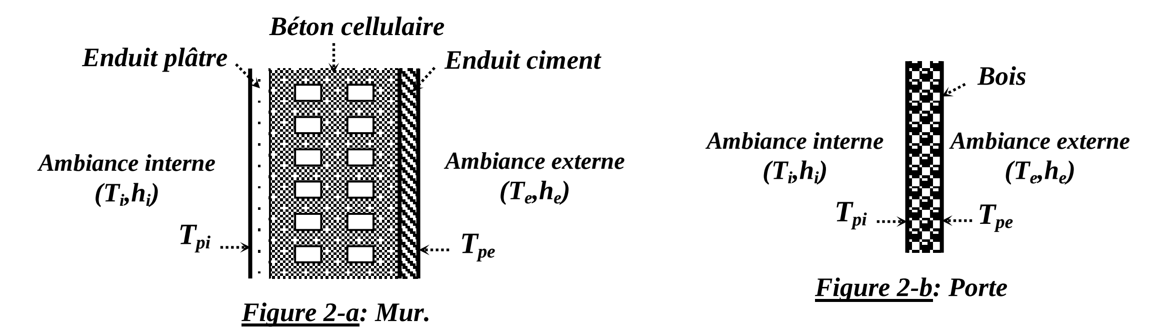
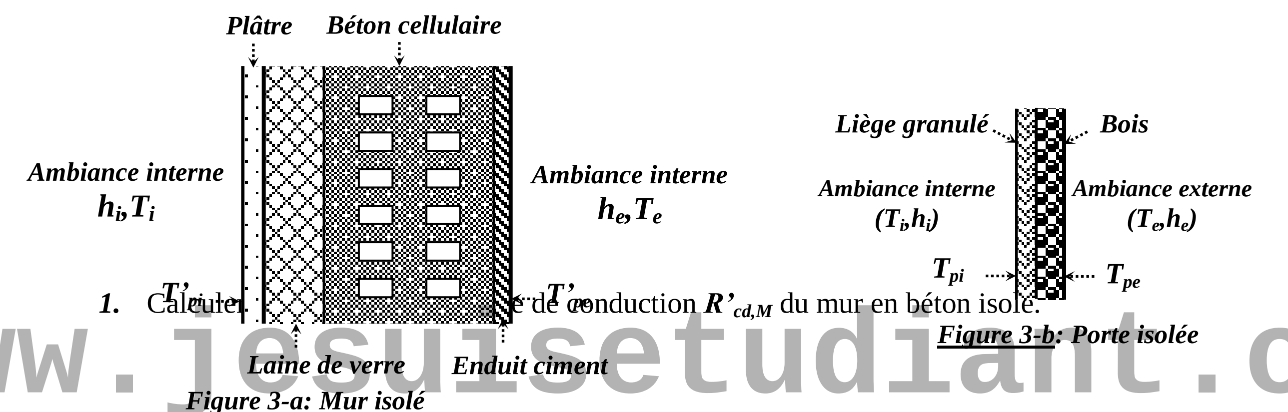


***Figure 2-a**: Mur.*

***Figure 2-b**: Porte*

1. Calculer la résistance thermique de conduction $R_{cd,M}$ du mur en béton.
2. Calculer la résistance thermique de conduction $R_{cd,P}$ de la porte.
3. En déduire la résistance thermique de conduction équivalente $R_{cd,eq}$.
4. Calculer les résistances thermiques de convection-rayonnement R_i et R_e au niveau des ambiances interne et externes respectivement.
5. Tracer le circuit thermique et calculer le flux thermique Φ traversant la façade. En déduire les températures T_{pi} et T_{pe}.

B. Pour renforcer l'isolation thermique de la façade, on colle contre la face intérieure de la couche de béton des panneaux de laine de verre (λ_i=0,038 W/m.°C et e_i=5 cm) qui sont protégés par la couche d'enduit plâtre (*figure 3-a*), et on recouvre la porte en bois d'une couche de liège granulé (λ_l=0,043 W/m.°C et e_l=2 cm).



1. Calculer [illegible]e de conduction $R'_{cd,M}$ du mur en béton isolé.

***Figure 3-b**: Porte isolée*

***Figure 3-a**: Mur isolé*

2. Calculer la résistance thermique de conduction $R'_{cd,P}$ de la porte isolée.
3. En déduire la résistance thermique de conduction équivalente $R'_{cd,eq}$.
4. Tracer le circuit thermique et calculer le flux thermique Φ' traversant la façade. En déduire la réduction, en pourcentage, du flux traversant la façade et les températures T'_{pi} et T'_{pe}.

C. La paroi interne de la façade à T'_{pi} et d'émissivité $\varepsilon_2=0,90$ échange de la chaleur par rayonnement avec le plafond chauffant en plâtre d'émissivité $\varepsilon_1=0,90$, de température $T_1=39$ et de largeur $l=4$ m. Calculer le flux radiatif net transféré du plafond à la paroi interne de la façade.

On donne: $F_{12}=0,21$ (facteur de forme géométrique pour le couple de surfaces rayonnantes plafond-façade) et $\sigma=5,67\times10^{-8}\ W/m^2.K^4$ (constante de ***Stefan-Boltzmann***).

Solution :

A. *Façade non isolée* :

1. Résistance thermique de conduction $R_{cd,M}$ du mur en béton

$$R_{cd,M} = \sum_{j=1}^{3} \frac{e_j}{\lambda_j \times S_M} \approx 48,9 \times 10^{-3}\ °C/W$$

avec: $S_M = L \times H - S_P = 20,4\ m^2$

S_M est la surface du mur en béton (sans porte) et S_P la surface de la porte ($S_P = 3,6\ m^2$).

2. Résistance thermique de conduction $R_{cd,P}$ de la porte

$$R_{cd,P} = \frac{e_b}{\lambda_b \times S_P} \approx 48,31 \times 10^{-3}\ °C/W$$

3. résistance thermique de conduction équivalente $R_{cd,eq}$

$$R_{cd,eq} = R_{cd,M} // R_{cd,P} = \frac{R_{cd,M} \times R_{cd,P}}{R_{cd,M} + R_{cd,P}} \approx 24,3 \times 10^{-3}\ °C/W$$

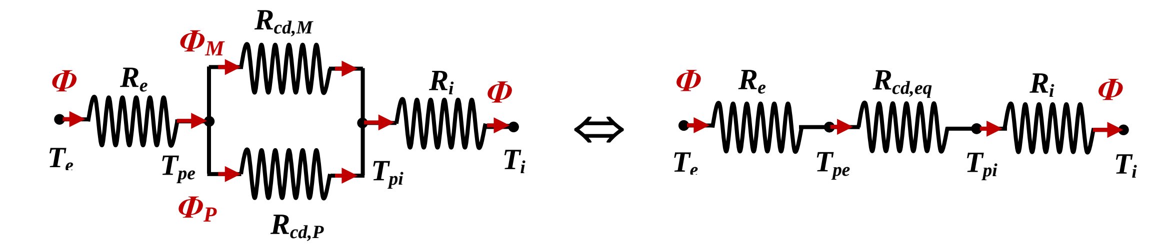
4. Résistances thermiques de convection-rayonnement R_i et R_e au niveau des ambiances interne et externes respectivement.

$$R_i = \frac{1}{h_i \times S} = \frac{1}{h_i \times L \times H} \approx 4,58 \times 10^{-3}\ °C/W$$

$$R_e = \frac{1}{h_e \times S} = \frac{1}{h_e \times L \times H} \approx 2,49 \times 10^{-3}\ °C/W$$

5. Circuit thermique, flux thermique Φ traversant la façade et températures T_{pi} et T_{pe}

➢ Circuit thermique :



➢ Flux thermique Φ traversant la façade:

D'après le circuit thermique, on a:

$$\Phi = \frac{T_e - T_i}{R_e + R_{cd,eq} + R_i} \approx 573,7\ W$$

➢ Températures T_{pi} et T_{pe}:

D'après le circuit, on a:

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{T_e - T_{pe}}{R_e} \\ \Phi = \dfrac{T_{pi} - T_i}{R_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{pe} = T_e - \Phi \times R_e \approx 36,6°C \\ T_{pi} = T_i + \Phi \times R_i \approx 22,6°C \end{cases}$$

B. *Façade isolée :*

1. Résistance thermique de conduction $R'_{cd,M}$ du mur en béton isolé :

$$R'_{cd,M} = R_{cd,M} + R_{cd,i} = R_{cd,M} + \frac{e_i}{\lambda_i \times S_M} = 113,4 \times 10^{-3} °C/W$$

$R_{cd,i} = \frac{e_i}{\lambda_i \times S_M}$ **:** résistance thermique de conduction de la couche isolante de la laine de verre.

2. Résistance thermique de conduction $R'_{cd,P}$ de la porte isolée :

$$R'_{cd,P} = R_{cd,P} + R_{cd,l} = R_{cd,P} + \frac{e_l}{\lambda_l \times S_P} = 177,5 \times 10^{-3} °C/W$$

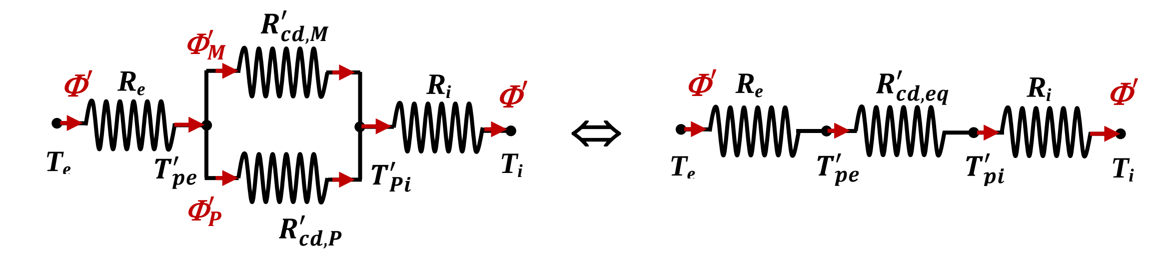
$R_{cd,l} = \frac{e_l}{\lambda_l \times S_P}$ **:** résistance thermique de conduction de la couche isolante du liège granulé.

3. Résistance thermique de conduction équivalente $R'_{cd,eq}$

$$R'_{cd,eq} = R'_{cd,M} // R'_{cd,P} = \frac{R'_{cd,M} \times R'_{cd,P}}{R'_{cd,M} + R'_{cd,P}} \approx 69,2 \times 10^{-3} °C/W$$

4. Circuit thermique, flux thermique Φ' traversant la façade et températures T'_{pi} et T'_{pe}

- Circuit thermique :



- Flux thermique Φ' traversant la façade:

D'après le circuit thermique, on a:

$$\Phi' = \frac{T_e - T_i}{R_e + R'_{cd,eq} + R_i} \approx 236\ W$$

- Réduction, en pourcentage, du flux traversant la façade:

$$\Delta\Phi\% = \frac{\Phi' - \Phi}{\Phi} \times 100 \approx -59\%$$

- Températures T'_{pi} et T'_{pe}:

D'après le circuit, on a:

$$\begin{cases} \Phi' = \dfrac{T_e - T'_{pe}}{R_e} \\ \Phi' = \dfrac{T'_{pi} - T_i}{R_i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'_{pe} = T_e - \Phi' \times R_e \approx 37,4°C \\ T'_{pi} = T_i + \Phi' \times R_i \approx 21,1°C \end{cases}$$

C. Flux radiatif net transféré du plafond à la paroi interne de la façade

- Plafond chauffant en plâtre: surface ***grise*** *($S_1 = L \times l = 32\ m^2$, T_1=39°C et ε_1=0,9).*
- Paroi interne de la façade: surface ***grise*** *($S_2 = L \times H = 24\ m^2$, $T_2 = T'_{pi}$=21,1°C et ε_2=0,09).*
- Facteur de forme géométrique pour le couple de surfaces rayonnantes plafond-façade: $F_{12} = 0,21$.

$$\Phi_{r,net:1\to2} = S_1 \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T_2^4\right) = L \times l \times \mathcal{F}_{12} \times \sigma \times \left(T_1^4 - T'^4_{pi}\right)$$

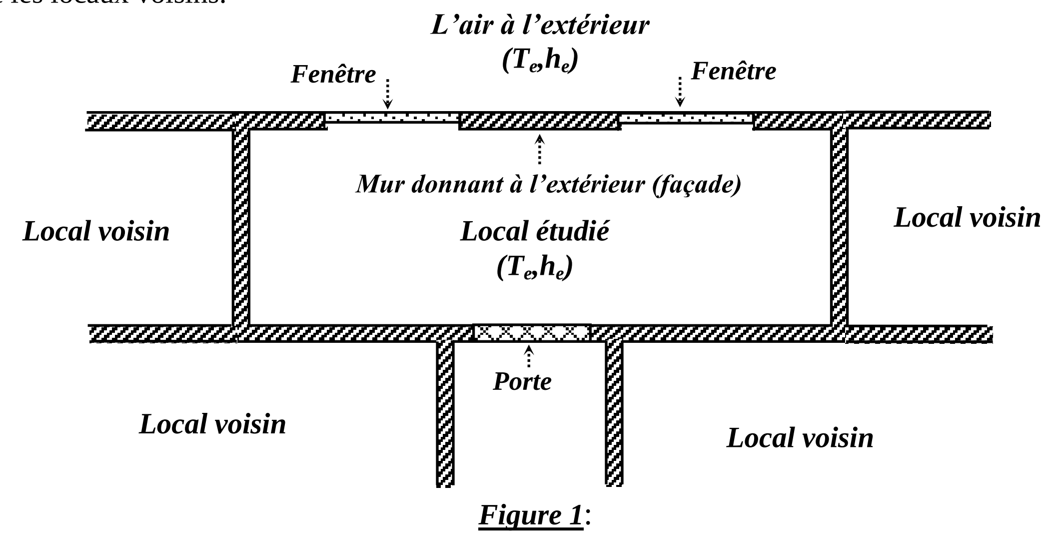
Les indices ***1*** et ***2*** correspondent respectivement au système de chauffage et à l'air.
Avec :

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{S_1}{S_2} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{12}} + \frac{l}{H} \times \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} = 0,2$$

$$\Phi_{r,net:1\to2} \approx 718\,W$$

<u>Exercice 23</u>: Isolation thermique d'un local (Contrôle de transfert de chaleur GC1-2010/2011)

On se propose d'étudier les échanges thermiques à travers le mur, donnant à l'extérieur, d'un bureau situé dans un immeuble. Ce mur, en béton et de dimensions ***L=10 m*** et ***H=3 m***, comporte deux fenêtres de surface $S_{V1}=3\ m^2$ chacune (*figure 1*). Pour tout le problème, les températures des ambiances interne et externe sont supposées constantes : $T_i=20°C$ et $T_e=7°C$, les coefficients d'échange thermique (convection et rayonnement) intérieur et extérieur sont respectivement $h_i=9,1\ W/m^2.°C$ et $h_e=16,67\ W/m^2.°C$. On suppose que les températures dans les locaux voisins situés dans le même étage, dans les étages supérieur et inférieur sont identiques et égales à ***20°C***. En d'autres termes, on néglige les échanges thermiques à travers le plafond, le plancher et les murs qui sont en contact avec les locaux voisins.



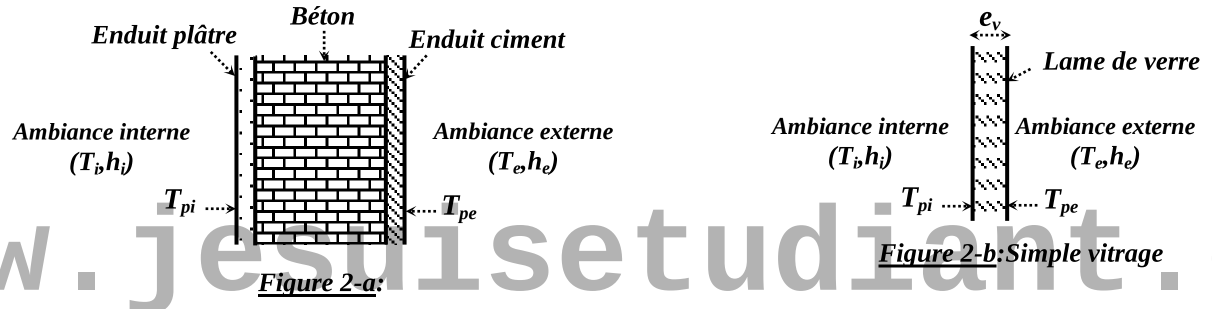
<u>Figure 1</u>:

A. Etude du mur non isolé

Le mur non isolé est constitué successivement, de l'intérieur vers l'extérieur, d'enduit plâtre, de béton plein et d'enduit ciment *(figure 2-a).*

Matériau	*Enduit plâtre*	*Béton plein*	*Enduit ciment*
Epaisseur e_i (cm)	$e_1=1,5$	$e_2=20$	$e_3=1$
Conductivité λ_i (W/m.°C)	$\lambda_1=0,35$	$\lambda_2=1,75$	$\lambda_3=1,15$

Les fenêtres (surfaces vitrées) sont constituées d'un simple vitrage : une lame de verre de conductivité thermique $\lambda_v=1,1W/m.°C$ et d'épaisseur $e_v=6\ mm$ *(figure 2-b).*



<u>Figure 2-a</u>:

<u>Figure 2-b</u>:Simple vitrage

1. *Etude du mur sans fenêtres* :

1.a- Calculer la résistance thermique de conduction $R_{cd,M}$ du mur sans fenêtres. En déduire la résistance thermique globale R_M de ce mur.

1.b- Calculer le flux thermique Φ_M traversant ce mur.

2. *Etude des fenêtres :*

2.a- Calculer la résistance thermique de conduction $R_{cd,V1}$ d'une fenêtre. En déduire la résistance thermique globale R_{V1} de cette fenêtre.

2.b- En déduire la résistance thermique globale équivalente R_V des deux fenêtres.

2.c- Calculer le flux thermique Φ_V traversant les deux fenêtres.

3. *Etude du mur avec fenêtres* :

3.a- Calculer le flux total Φ traversant le mur avec fenêtres.

3.b- Tracer le circuit thermique correspondant. En déduire les températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces frontières interne et externe du mur.

4. On utilise un système de chauffage électrique pour compenser les pertes thermiques qui se produisent pendant les ***4*** mois de froid. Sachant que ce système fonctionne ***10 heures par jour*** et que le prix moyen de ***1 kWh*** est ***ĉ=1,35 Dhs,*** calculer le coût de chauffage pour la période de froid. On comptera ***30*** jours par mois. On rappelle que : $1\ KWh=1\ KW\times 1\ heure=3,6\times 10^6$ ***Joules.***

B. Etude du mur isolé

Pour limiter les pertes thermiques à travers le mur (donc la facture de chauffage), on procède à une isolation thermique de celui-ci.

- Isolation du mur sans fenêtres :

On intercale entre les couches de béton et d'enduit plâtre une couche isolante de polystyrène expansé d'épaisseur $e_i=5\ cm$ et de conductivité thermique $\lambda_i=0,033\ W/m.°C$ *(figure 3-a).*

- Isolation des fenêtres :

On remplace le simple vitrage par un double vitrage ***verre/krypton/verre*** composé de deux lames de verre de même épaisseur $e_v=6\ mm$ et de conductivité thermique $\lambda_v=1,1 W/m.°C$, entre lesquelles est placée une lame de krypton, gaz immobile, d'épaisseur $e_k=12\ mm$ et de conductivité thermique $\lambda_k=0,0095 W/m.°C$.

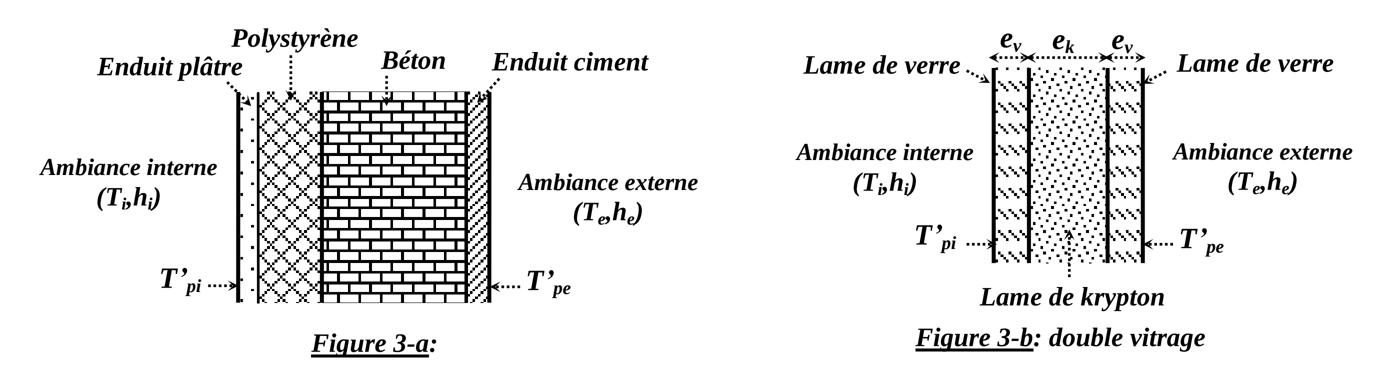


Figure 3-a:

Figure 3-b: double vitrage

1. *Etude du mur isolé sans fenêtres* :

1.a- Calculer la résistance thermique de conduction $R'_{cd,M}$ du mur sans fenêtres. En déduire la résistance thermique globale R'_M de ce mur.

1.b- Calculer le flux thermique Φ'_M traversant ce mur.

2. *Etude des fenêtres :*

2.a- Calculer la résistance thermique de conduction $R'_{cd,V1}$ d'une fenêtre. En déduire la résistance thermique globale R'_{V1} de cette fenêtre.

2.b- En déduire la résistance thermique globale équivalente R'_V des deux fenêtres.

2.c- Calculer le flux thermique Φ'_V traversant les deux fenêtres.

3. *Etude du mur avec fenêtres* :

3.a- Calculer le flux total Φ' traversant le mur avec fenêtres.

3.b- Tracer le circuit thermique correspondant. En déduire les températures T'_{pi} et T'_{pe} sur les surfaces frontières interne et externe du mur.

4. Calculer la réduction, en pourcentage, du flux total traversant le mur.
5. Calculer l'économie réalisée par l'isolation du mur pendant les ***4 mois*** de froid.

<u>Solution</u>:

A. Etude du mur non isolé

1. Etude du mur sans fenêtres

1.a) Résistance thermique de conduction $R_{cd,M}$ du mur sans fenêtres

$$R_{cd,M} = \sum_{j=1}^{3} R_{cd,j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{e_j}{\lambda_j \times S_M} \approx 6,91 \times 10^{-3}\ °C/W$$

où $S_M = S - S_V = L \times H - 2 \times S_{V1} = 24\ m^2$ est la surface du mur en béton ***sans fenêtres***.

On en déduit la résistance thermique globale R_M de ce mur

$$R_M = R_{i,M} + R_{cd,M} + R_{e,M} = \frac{1}{h_i \times S_M} + R_{cd,M} + \frac{1}{h_e \times S_M} \approx 14 \times 10^{-3}\ °C/W$$

1.b) Flux thermique Φ_M traversant le mur

$$\Phi_M = \frac{T_i - T_e}{R_M} \approx 929\ W$$

2. Etude des fenêtres

2.a) Résistance thermique de conduction $R_{cd,V1}$ d'une fenêtre:

$$R_{cd,V1} = \frac{e_V}{\lambda_V \times S_{V1}} \approx 1,82 \times 10^{-3}\ °C/W$$

où S_{V1} est la surface d'une fenêtre.

On en déduit la résistance thermique globale R_{V1} de cette fenêtre:

$$R_{V1} = R_{i,V1} + R_{cd,V1} + R_{e,V1} = \frac{1}{h_i \times S_{V1}} + R_{cd,V1} + \frac{1}{h_e \times S_{V1}} \approx 58,45 \times 10^{-3}\ °C/W$$

2.b) Résistance thermique globale équivalente R_V des deux fenêtres:

$$R_V = R_{V1} // R_{V1} = \frac{R_{V1}}{2} \approx 29,22 \times 10^{-3}\ °C/W$$

2.c) Flux thermique Φ_V traversant les deux fenêtres:

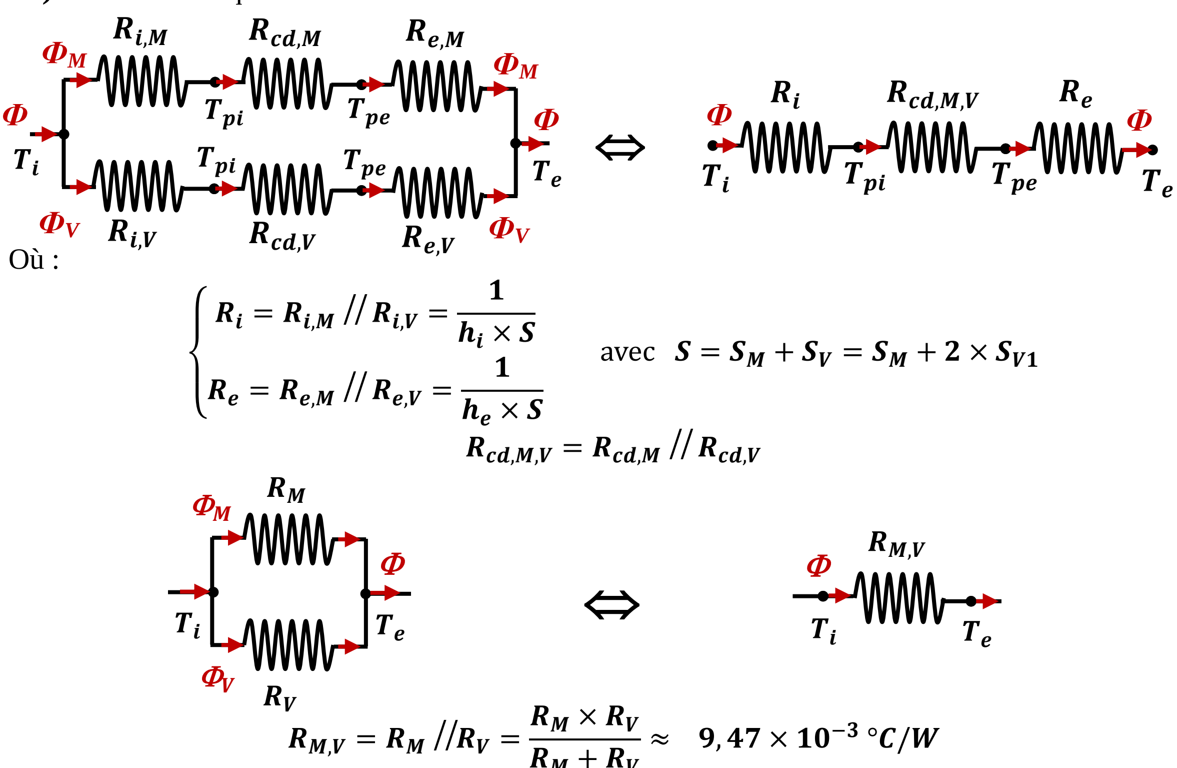
$$\Phi_V = \frac{T_i - T_e}{R_V} \approx 445\ W$$

3. Etude du mur avec fenêtres

3.a) Flux total Φ traversant le mur avec fenêtres:

$$\Phi = \Phi_M + \Phi_V \approx 1374\ W$$

3.b) Circuit thermique:



Où :

$$\begin{cases} R_i = R_{i,M} // R_{i,V} = \dfrac{1}{h_i \times S} \\ R_e = R_{e,M} // R_{e,V} = \dfrac{1}{h_e \times S} \end{cases} \quad \text{avec} \quad S = S_M + S_V = S_M + 2 \times S_{V1}$$

$$R_{cd,M,V} = R_{cd,M} // R_{cd,V}$$

$$R_{M,V} = R_M // R_V = \frac{R_M \times R_V}{R_M + R_V} \approx 9,47 \times 10^{-3}\ °C/W$$

On en déduit les températures T_{pi} et T_{pe} sur les surfaces frontières interne et externe du mur :
D'après le circuit, on a:

$$\begin{cases} \Phi = \dfrac{T_i - T_{pi}}{R_i} \\ \Phi = \dfrac{T_{pe} - T_e}{R_e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{pi} = T_i - \Phi \times R_i \approx 15°C \\ T_{pe} = T_e + \Phi \times R_e \approx 10°C \end{cases}$$

4. Coût de chauffage pour la période de froid (***4 mois***):

Le système de chauffage électrique doit consommer une quantité d'énergie électrique égale à la chaleur qu'il produit pour compenser les pertes thermiques du local pendant les ***4*** mois de froid.

$$W_{élect/4\,mois} = Q_{produite/4\,mois} = \Phi \times \Delta t$$

$$W_{élect/4\,mois} = 1374 \times 4 \times 30 \times 10 \times 3600 = 5935,68\ MJ = 1648,8\ KWh$$

$$1\ KWh\ d'électricité \rightarrow \hat{c} = 1,35\ Dhs$$
$$W_{élect/4\,mois} \rightarrow \tilde{C}_{4\,mois}$$

Donc, le coût de chauffage pour la période de froid (***4 mois***) est donné par :

$$\tilde{C}_{4\,mois} = \frac{W_{élect/4\,mois} \times \hat{c}}{1\ KWh} \approx 2226\ Dhs$$

B. Etude du mur isolé

Pour limiter les pertes thermiques à travers le mur (donc la facture de chauffage), on procède à une isolation thermique de celui-ci.

6. *Etude du mur isolé sans fenêtres* :

1.a) Résistance thermique de conduction $R'_{cd,M}$ du mur sans fenêtres:

$$R'_{cd,M} = \sum_{j=1}^{4} R_{cd,j} = R_{cd,M} + \frac{e_i}{\lambda_i \times S_M} \approx 70,04 \times 10^{-3}\ °C/W$$

On en déduit la résistance thermique globale R'_M de ce mur:

$$R'_M = R_{i,M} + R'_{cd,M} + R_{e,M} = \frac{1}{h_i \times S_M} + R'_{cd,M} + \frac{1}{h_e \times S_M} \approx 77,12 \times 10^{-3}\ °C/W$$

1.b) Flux thermique Φ'_M traversant ce mur:

$$\Phi'_M = \frac{T_i - T_e}{R'_M} \approx 168,6\ W$$

7. Etude des fenêtres :

2.a) Résistance thermique de conduction $R'_{cd,V1}$ d'une fenêtre :

$$R'_{cd,V1} = 2 \times \frac{e_V}{\lambda_V \times S_{V1}} + \frac{e_K}{\lambda_K \times S_{V1}} \approx 424,7 \times 10^{-3}\ °C/W$$

On en déduit la résistance thermique globale R'_{V1} de cette fenêtre:

$$R'_{V1} = R_{i,V1} + R'_{cd,V1} + R_{e,V1} = \frac{1}{h_i \times S_{V1}} + R'_{cd,V1} + \frac{1}{h_e \times S_{V1}} \approx 481,33 \times 10^{-3}\ °C/W$$

2.b) Résistance thermique globale équivalente R'_V des deux fenêtres:

$$R'_V = R'_{V1} // R'_{V1} = \frac{R'_{V1}}{2} \approx 240,66 \times 10^{-3}\ °C/W$$

2.c) Flux thermique Φ'_V traversant les deux fenêtres

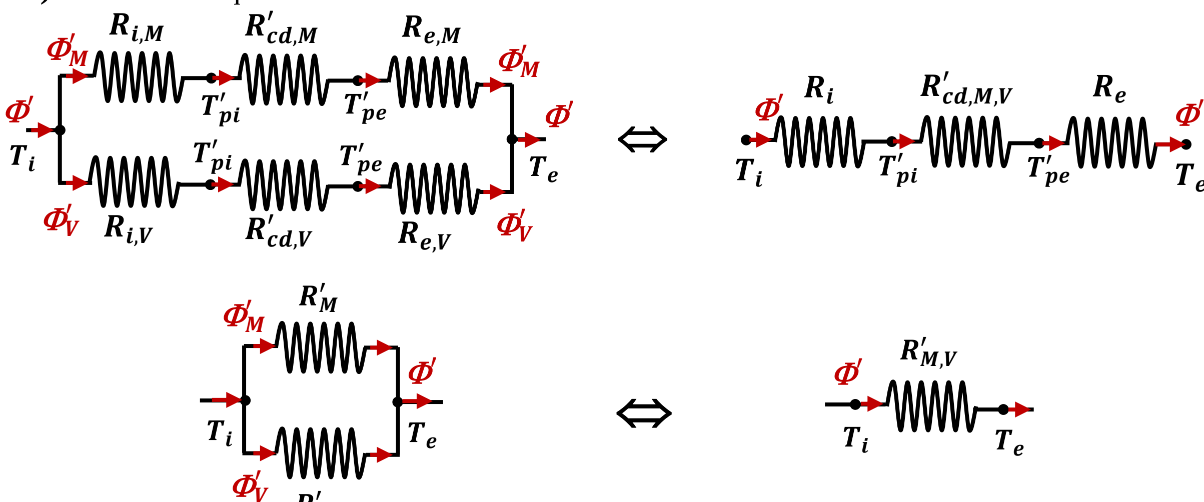
$$\Phi'_V = \frac{T_i - T_e}{R'_V} \approx 54,02\ W$$

8. Etude du mur avec fenêtres :

3.a) Flux total Φ' traversant le mur avec fenêtres:

$$\Phi' = \Phi'_M + \Phi'_V \approx 222,6\ W$$

3.b) Circuit thermique:



On en déduit les températures T'_{pi} et T'_{pe} sur les surfaces frontières interne et externe du mur:

D'après le circuit, on a:

$$\begin{cases} \Phi' = \dfrac{T_i - T'_{pi}}{R_i} \\ \Phi' = \dfrac{T'_{pe} - T_e}{R_e} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'_{pi} = T_i - \Phi' \times R_i \approx 19,2°C \\ T'_{pe} = T_e + \Phi' \times R_e \approx 7,45°C \end{cases}$$

9. Réduction, en pourcentage, du flux total traversant le mur :

$$\Delta\Phi\% = \frac{\Phi' - \Phi}{\Phi} \times 100 \approx -84\%$$

10. Economie réalisée par l'isolation du mur pendant les ***4 mois*** de froid:

$$W_{élect,économ/4\,mois} = Q_{économ/4\,mois} = |\Phi' - \Phi| \times \Delta t$$

$$W_{élect,économ/4\,mois} = 1151,4 \times 4 \times 30 \times 10 \times 3600 = 4974,05\ MJ = 1381,68\ KWh$$

$$1\ KWh\ d'électricité \rightarrow \hat{c} = 1,35\ Dhs$$

$$W_{élect,économ/4\,mois} \rightarrow \tilde{C}'_{4\,mois}$$

Donc, le coût de chauffage pour la période de froid (***4 mois***) est donné par :

$$\tilde{C}'_{4\,mois} = \frac{W_{élect,économ/4\,mois} \times \hat{c}}{1\ KWh} \approx 1865,268\ Dhs$$

Exercice 24:

La façade d'une maison, de ***50 m²*** de surface, est constituée d'un mur de briques et d'une plaque de plâtre d'épaisseurs respectives ***25 cm*** et ***1 cm***. La façade est percée de quatre vitres de ***1 m²*** de surface et de ***4 mm*** d'épaisseur et d'une porte de ***3 m²*** de surface, composée d'une épaisseur de ***4 cm*** de bois recouverte d'une couche de liège granulé de ***2 cm*** d'épaisseur. Pour tous les matériaux constituant la façade, les températures des parois interne T_1 et externe T_2 sont respectivement égales à ***25°C*** et ***40°C***.

Matériau	***Verre***	***Briques***	***Bois***	***Plâtre***	***Liège granulé***
Conductivité thermique (W/m.°C)	***0,7***	***0,52***	***0,21***	***0,35***	***0,045***

1- Donner un schéma stylisé de la façade ainsi constitué.

2- Calculer les différentes résistances thermiques. En déduire la résistance thermique totale de la façade.

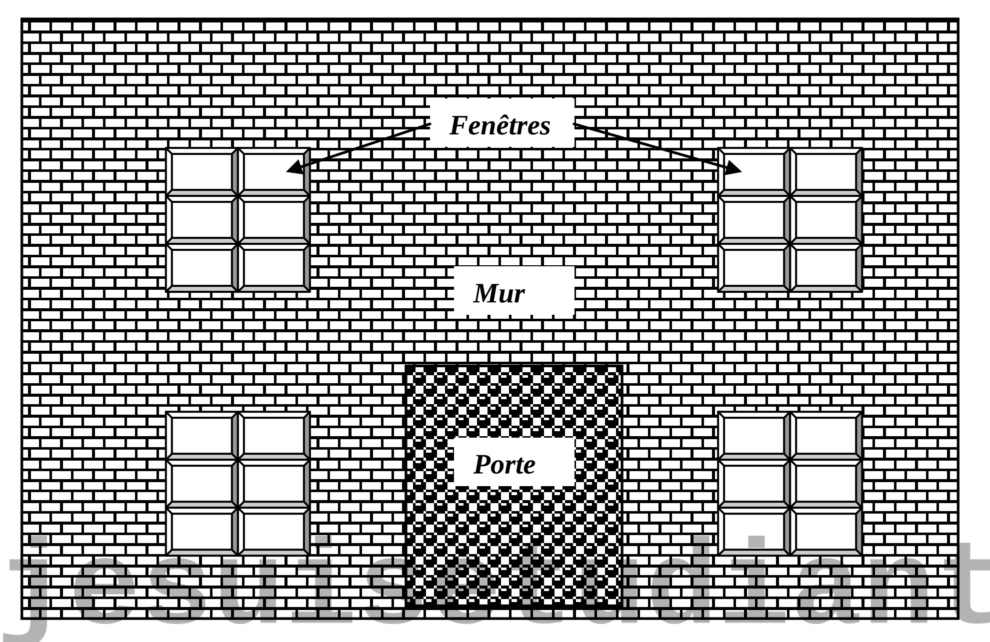
3- Représenter le schéma électrique équivalent.

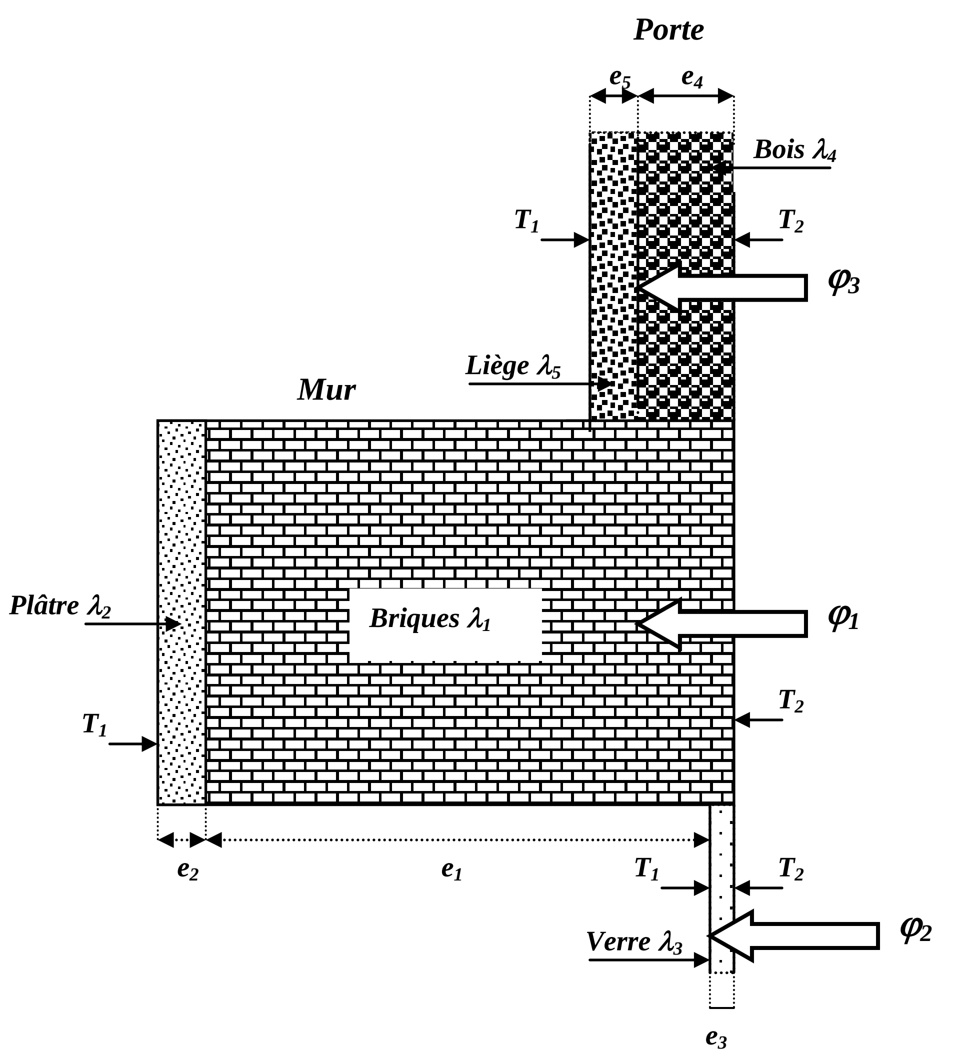
4- Calculer les flux thermiques Φ_1, Φ_2 et Φ_3 traversant respectivement le mur, les vitres et la porte. Conclure.

5- En déduire le flux total Φ_{tot}.

Solution:

1- ***Schéma descriptif***:





2- *Résistances thermiques:*

- Résistance thermique de conduction du mur:

On a:

$$\varphi_1 = \frac{\Delta T}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2}} = \frac{\Delta T}{r_{cd1}} \quad \text{et} \quad \Phi_1 = S_1 \times \varphi_1 = \frac{\Delta T}{\frac{r_{cd1}}{S_1}} = \frac{\Delta T}{R_{cd1}}$$

D'où :

$$R_1 = \frac{1}{S_1} \times \left(\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} \right)$$

A.N.: $R_1 \approx \ldots\ldots \times 10^{-3}$ °C/W

- Résistance thermique de conduction de la vitre:

On a:

$$\varphi_2 = \frac{\Delta T}{\frac{e_3}{\lambda_3}} = \frac{\Delta T}{r_{cd2}} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = S_2 \times \varphi_2 = \frac{\Delta T}{\frac{r_{cd2}}{S_2}} = \frac{\Delta T}{R_{cd2}}$$

D'où :

$$R_2 = \frac{1}{S_2} \times \left(\frac{e_3}{\lambda_3} \right)$$

A.N.: $R_2 \approx \ldots\ldots \times 10^{-3}$ °C/W

- Résistance thermique de conduction de la porte:

On a:

$$\varphi_3 = \frac{\Delta T}{\dfrac{e_4}{\lambda_4} + \dfrac{e_5}{\lambda_5}} = \frac{\Delta T}{r_{cd3}} \quad \text{et} \quad \Phi_3 = S_3 \times \varphi_3 = \frac{\Delta T}{\dfrac{r_{cd3}}{S_3}} = \frac{\Delta T}{R_{cd3}}$$

D'où:

$$R_3 = \frac{1}{S_3} \times \left(\frac{e_4}{\lambda_4} + \frac{e_5}{\lambda_5} \right)$$

A.N.: $R_3 \approx 211{,}6 \times 10^{-3}$ °C/W

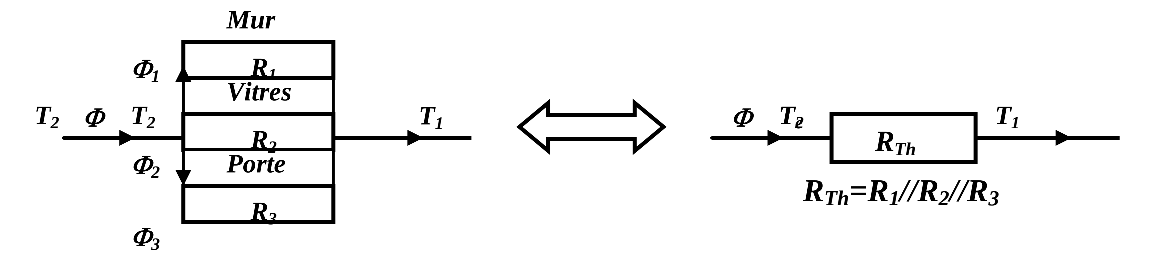
Il s'ensuit que la résistance totale de la façade s'écrit :

$$R_{Th} = R_1 \,\mathrm{P}\, R_2 \,\mathrm{P}\, R_3$$

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

A.N.: $R_{Th} \approx 1{,}27 \times 10^{-3}$ °C/W

3- *Schéma électrique*:



4- *Flux thermique* :

- Flux thermique traversant le mur:

$$\Phi_1 = \frac{T_2 - T_1}{R_1}$$

A.N. : $\Phi_1 \approx 1266$ W

- Flux thermique traversant les quatre vitres:

$$\Phi_2 = \frac{T_2 - T_1}{R_2}$$

A.N. : $\Phi_2 \approx 10490$ W

Le flux traversant une seule vitre est:

$\Phi_{2/V} \approx 2622{,}5$ W

- Flux thermique traversant la porte:

$$\Phi_3 = \frac{T_2 - T_1}{R_3}$$

A.N. : $\Phi_3 \approx 70{,}9$ W

On constate que:

$$\Phi_3 < \Phi_3 < \Phi_2$$

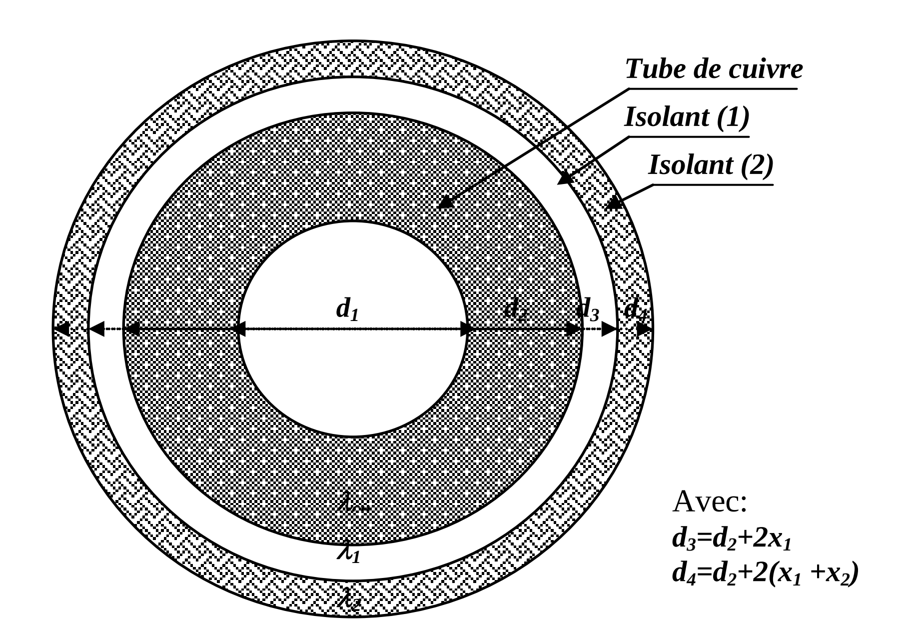
5- Flux total, ***Φ :***

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$$

A.N. : $\Phi \approx 11827$ W

Exercice 25:

On veut isoler un tube de cuivre de diamètres intérieur d_1**=20 mm** et extérieur d_2**=27 mm**, de longueur ***L=1 m*** et de conductivité thermique λ_{cu}**=330 Kcal/h.m.°C**, à l'aide de deux isolants de conductivités thermiques respectives: λ_1**=0,1 Kcal/h.m.°C** et λ_2**=0,05 Kcal/h.m.°C**. L'ensemble doit avoir une résistance thermique minimale de ***1,04 h.°C/Kcal*** et un diamètre extérieur maximal de ***45 mm***. Déterminer les caractéristiques de cette isolation (épaisseur de chacun des isolants).



Avec:
$d_3=d_2+2x_1$
$d_4=d_2+2(x_1+x_2)$

Solution:

Il faut que : $\begin{cases} R_{th} \geq R_{th/\min} = 1{,}04\ °C.m.h/Kcal & (1) \\ d_{ext} \leq d_{\max} = 45mm & (2) \end{cases}$

Par ailleurs, la résistance thermique totale s'écrit :

$$R_{th} = R_{Cu} + R_1 + R_2$$

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi L}\left[\frac{Ln(\frac{d_2}{d_1})}{\lambda_{cu}} + \frac{Ln(\frac{d_2+2x_1}{d_2})}{\lambda_1} + \frac{Ln(\frac{d_2+2(x_1+x_2)}{d_2+2x_1})}{\lambda_2}\right] \quad (1')$$

et le diamètre extérieur s'écrit :

$$d_{ext} = d_2 + 2(x_1+x_2) \quad (2')$$

Si $R_{th}=R_{th/min}$ alors $d_{ext}=d_{max}$

Il en résulte, tenant compte de (1') et (2'), que :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \text{ mm} \\ 2\pi L.R_{th/\min} - \dfrac{Ln(\frac{d_2}{d_1})}{\lambda_{cu}} = \left[\dfrac{Ln(\frac{d_2+2x_1}{d_2})}{\lambda_1} + \dfrac{Ln(\frac{d_2+2(x_1+x_2)}{d_2+2x_1})}{\lambda_2}\right] \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} x_1 = 6\ mm \\ x_1 + x_2 = 9\ mm \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6\ mm \\ x_2 = 3\ mm \end{cases}$$

Donc, l'isolant de conductivité thermique λ_1***=0,1 Kcal/h.m.°C*** doit avoir une épaisseur x_1***=6 mm*** et celui de λ_2***=0,05 Kcal/h.m.°C*** doit avoir une épaisseur x_2***=3mm***.

***Exercice 26*:**

Pour réaliser le chauffage par le sol d'un local, on dispose les revêtements suivants (figure ci-dessous):

- Une couche de vermiculite de ***10 cm***; coefficient de conductivité thermique:

$$\lambda_3=60\times10^{-5}\ cal.s^{-1}.cm^{-1}.°C^{-1}$$

- Une couche de mâchefer de ***5 cm***:

$$\lambda_2=180\times10^{-5}\ cal.s^{-1}.cm^{-1}.°C^{-1}$$

On dispose sur cette couche des éléments chauffants et on les recouvre de ***3 cm*** de mâchefer.

On coule par dessus, 2 cm de ciment pour fixer le revêtement. On recouvre le tout par des dalles de marbre de 2 cm d'épaisseur. Le coefficient de conductivité du ciment et du marbre est le même

$$\lambda_1=600\times10^{-5}\ cal.s^{-1}.cm^{-1}.°C^{-1}$$

La température des éléments chauffants est T_1***=100°C*** et celle du sol, sous la vermiculite, est identique à la température du revêtement sur sa surface limite en contact avec l'atmosphère de la pièce à chauffer soit T_0***=20°C***.

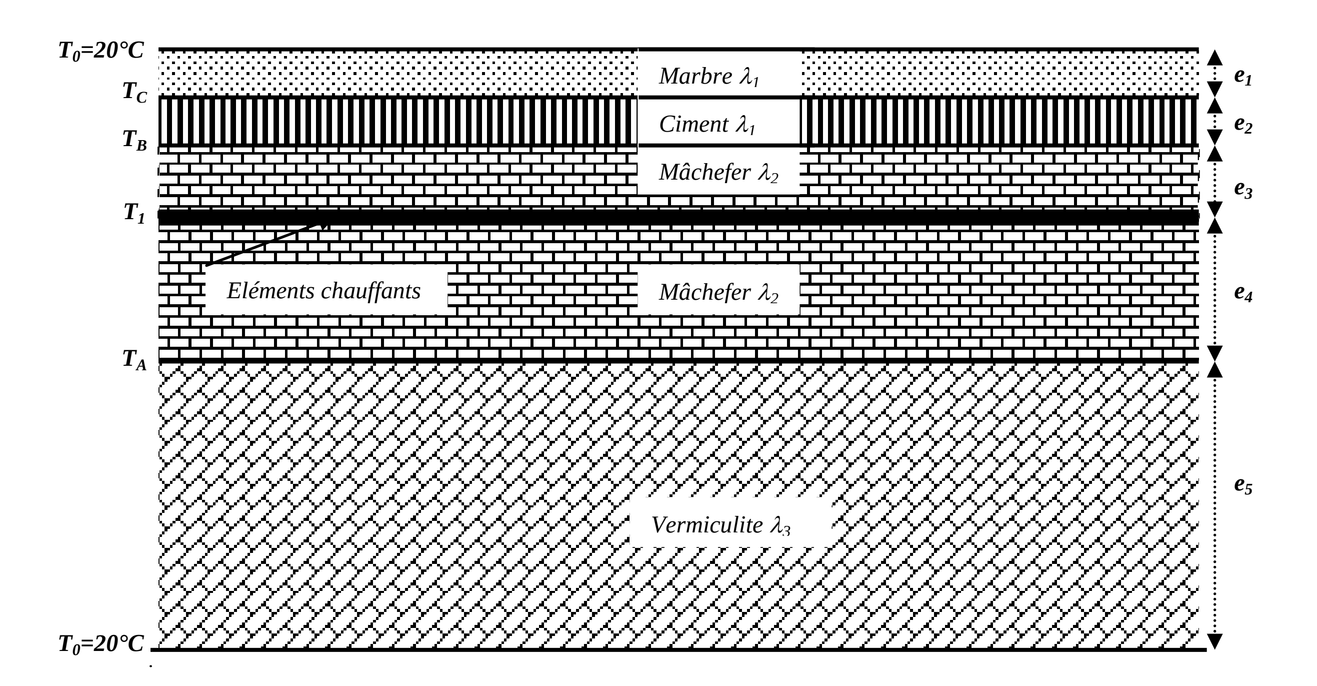
1- Déterminer les résistances thermiques rencontrées par le flux.

2- Déterminer la fraction d'énergie calorifique perdue par le sol en dessous de la vermiculite et celle transférée vers le sol du local.

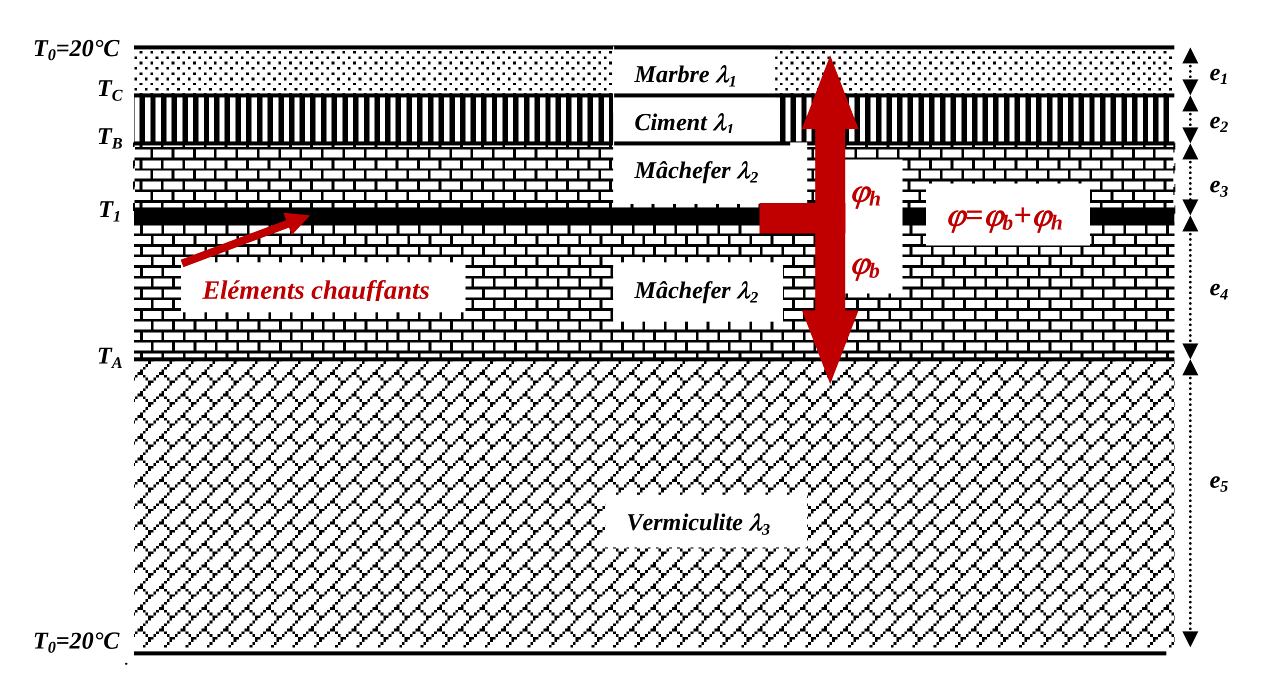
3- Déterminer les températures atteintes par les différentes surfaces de séparation.

4- On suppose que ***100 cm*** de terre de coefficient de conductivité $\lambda=100\times10^{-5}\ cal.s^{-1}.cm^{-1}.°C^{-1}$ participe à l'isolement. En dessous de cette épaisseur, la température est ***10°C*** et celle des éléments chauffants est toujours maintenue à ***100°C***.

Que devient dans ces conditions, la fraction d'énergie calorifique perdue vers le bas?



Solution:
Schéma descriptif:



On a des éléments chauffants à température constante T_1**=100°C** produisant une densité de flux thermique dont une partie se propage vers le local à chauffer, φ_h, et l'autre partie vers le sol, φ_b:

$$\varphi=\varphi_h+\varphi_b$$

1- Résistances thermiques rencontrées par le flux:

- vers le haut, on a:

$$\varphi_h=-\lambda_2\frac{T_1-T_B}{e_3}=-\lambda_1\frac{T_B-T_C}{e_2}=-\lambda_1\frac{T_C-T_0}{e_1}$$

qui s'écrit encore:

$$\varphi_h=\frac{T_1-T_B}{R_3}=\frac{T_B-T_C}{R_2}=\frac{T_C-T_0}{R_1}$$

où:

$R_3=\frac{e_3}{\lambda_2}$: résistance thermique de conduction relative à la couche de mâchefer;

$R_2=\frac{e_2}{\lambda_1}$: résistance thermique de conduction relative à la couche de ciment;

$R_1=\frac{e_1}{\lambda_1}$: résistance thermique de conduction relative à la couche de marbre.

A.N. : $R_1\approx 9{,}26\times10^{-3}\ h.m^2.°C/Kcal$;
$R_2\approx 9{,}26\times10^{-3} h.m^2.°C/Kcal$
et $R_3\approx 46{,}3\times10^{-3}\ h\ .m^2.°C/Kcal$

- vers le bas, on a:

$$\varphi_b=-\lambda_2\frac{T_1-T_A}{e_4}=-\lambda_3\frac{T_A-T_0}{e_5}$$

qui s'écrit encore:

$$\varphi_b=\frac{T_1-T_A}{R_4}=\frac{T_A-T_0}{R_5}$$

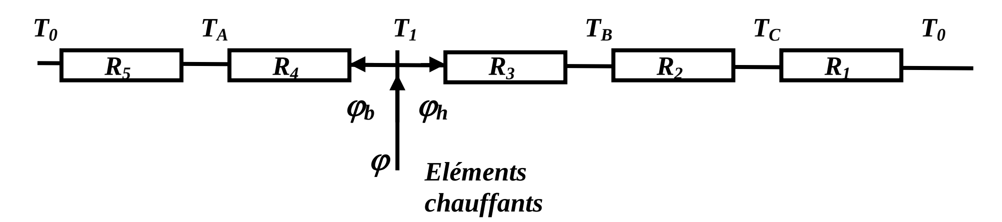
où:

$R_4=\frac{e_4}{\lambda_2}$: résistance thermique de conduction relative à la couche de mâchefer;

$R_5=\frac{e_5}{\lambda_3}$: résistance thermique de conduction relative à la couche de vermiculite.

A.N. : $R_4 \approx 77\times10^{-3}\ h.m^2.°C/Kcal$
et $R_5 \approx 463\times10^{-3}\ h.m^2.°C/Kcal$

2- Circuit thermique:



3- Densité de flux thermique φ_b (puissance thermique perdue):

$$\varphi_b = \frac{T_1 - T_0}{R_4 + R_5}$$

A.N.: $\varphi_b \approx 148\ Kcal/h.m^2$

Densité de flux thermique φ_h (puissance thermique utile):

$$\varphi_h = \frac{T_1 - T_0}{R_3 + R_2 + R_1}$$

A.N.: $\varphi_b \approx 1234\ Kcal/h.m^2$

La densité du flux thermique totale produite par les éléments chauffants est :

$$\varphi = \varphi_b + \varphi_h$$

A.N.: $\varphi \approx 1382\ Kcal/h.m^2$

On en déduit la fraction de l'énergie thermique perdue par le sol en dessous de la vermiculite:

$$f_P = \frac{\varphi_b}{\varphi} \times 100$$

A.N.: $fp \approx 10,7\%$

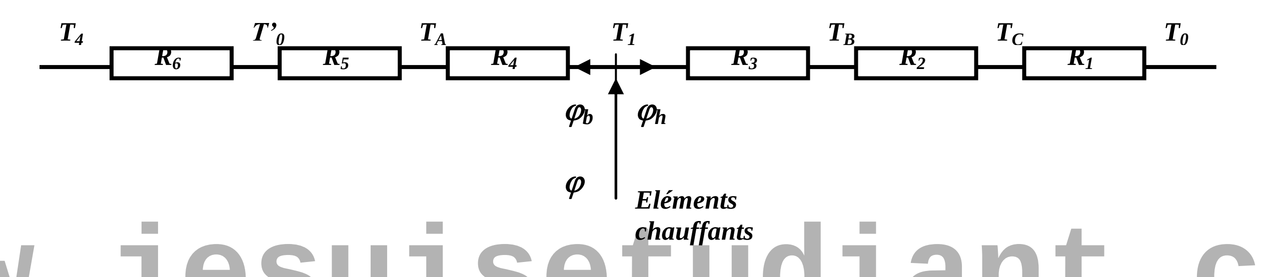
Donc, *10,7%* de la puissance thermique produite par les éléments chauffants est perdue vers le sol en dessous de la couche de la vermiculite et *89,3%* de cette puissante est transfert vers le local à chauffer.

4- Températures atteintes par les différentes surfaces de séparation :

$$T_A = T_1 - R_4\varphi_b$$
$$T_B = T_1 - R_3\varphi_h$$
$$T_C = T_0 + R_1\varphi_h$$

A.N.: $T_A \approx 88,6°C$
$T_B \approx 42,9°C$
et $T_C \approx 31,4°C$

5- On suppose que *100 cm* de terre de $\lambda=100\times10^{-5}\ cal/s.m.°C$ participe à l'isolement. C'est-à-dire, on ajoute une couche de terre d'épaisseur e_6 en dessous de la vermiculite. Ceci revient à ajouter une résistance thermique de conduction $R_6=e_6/\lambda$ au circuit thermique comme indiqué dans le schéma suivant:



On suppose que dans ce cas, rien n'est modifié dans la partie supérieure aux éléments chauffants et l'on a toujours: $\varphi_b \approx 1234\ Kcal/h.m^2$.

En revanche, en dessous des éléments chauffants, on a:

$$\varphi'_b = \frac{T_1 - T_4}{R_4 + R_5 + R_6} \quad \text{où} \quad R_6 = \frac{e_6}{\lambda}$$

A.N.: $\varphi'_b \approx 27{,}13\ Kcal/h.m^2$

Et la perte d'énergie thermique vers le sol est alors seulement de :

$$f_b = \frac{\varphi'_b}{\varphi} \times 100$$

A.N.: $fp \approx 2\%$

Donc, seulement ***2%*** de la densité de flux thermique produite par les éléments chauffants est perdue vers le bas.

***Exercice 27*: (Extrait de TD de transfert de chaleur GC1-2011/2012)**

''Un plancher chauffant est un procédé d'émission de chaleur destiné à chauffer un habitat ou un local utilisant la surface du sol pour chauffer l'air intérieur.''

Une maison couvre une surface de ***120 m²*** (***10 m×12 m***). La hauteur sous plafond est de ***3 m***. La surface globale des portes et des fenêtres est de ***40 m²***. Les coefficients globaux de transfert de chaleur sont :

- murs extérieurs : $K_1=0{,}60\ W/m^2.K$;
- fenêtres et portes : $K_2=3\ W/m^2.K$;
- plafond et toiture : $K_3=0{,}66\ W/m^2.K$.

On se propose d'étudier un chauffage par le sol. La température à maintenir dans la maison est $T_i=20°C$. La température extérieure est $T_e=-5°C$.

1. Calculer le flux de chaleur Φ_1 transmis à travers l'ensemble des parois.
2. La figure ci-après représente la coupe transversale d'un plancher dans lequel on a incorporé un système de chauffage. Ce système est constitué d'un tube dans lequel circule de l'eau à une température moyenne supposée uniforme. On assimile le système de chauffage à un plan horizontal de ***120 m²*** ayant une température uniforme T_C.

On note:

- T_F, la température du sol de fondation : $T_F=2{,}0°C$;
- T_i, la température intérieure : $T_i=20°C$;
- ***h***, le coefficient d'échange par convection et par rayonnement entre la surface du revêtement du plancher à la température T_S et le milieu ambiant à la température T_i: $h=10\ W/m^2.°C$.

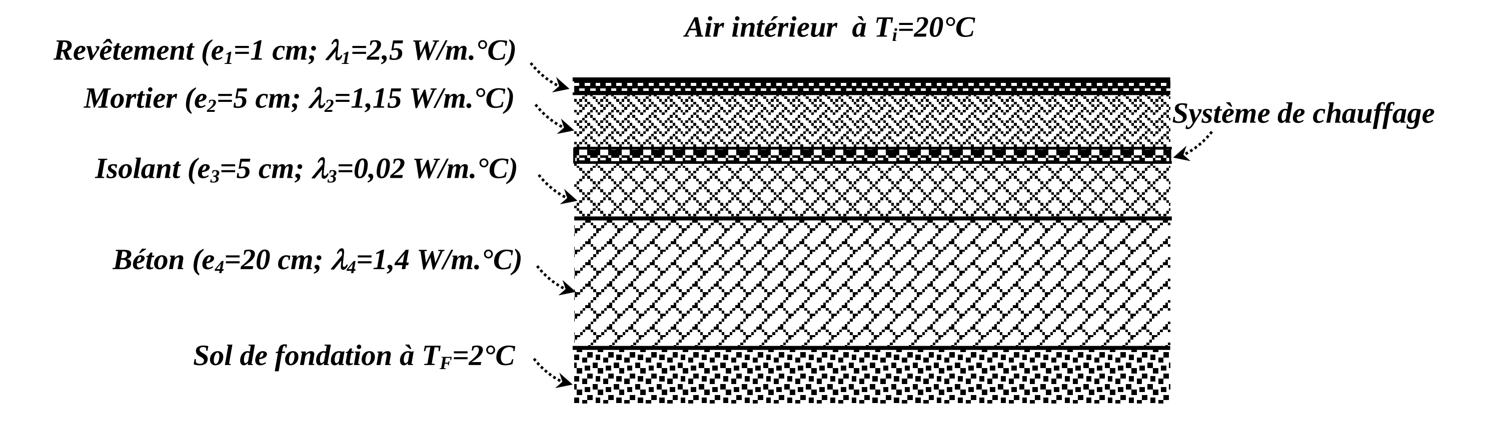
2.a) Calculer r_{Ci}, la résistance thermique, par unité de surface, comprise entre le système de chauffage et l'intérieur de la maison.

2.b) Calculer r_{Cf}, la résistance thermique, par unité de surface, comprise entre le système de chauffage et le sol de fondation.

2.c) le flux de chaleur vers l'intérieur fourni par le plancher chauffant étant : $\Phi_{C1}=5370\ W$. Calculer les températures T_S et T_C.

2.d) Calculer le flux de chaleur Φ_{C2} transmis du système de chauffage au sol de fondation.

2.e) On considère que le rendement de l'ensemble chaudière+plancher chauffant est ***80%***. Le prix de ***1 KWh*** étant de ***1,35 Dhs***, calculer le prix de revient d'une journée de chauffage.



Solution:

- Surface totale du plancher $S_0=120\ m^2$.
- Surface totale des murs avec portes et fenêtres : $S=(l\times H)+(L\times H)=66\ m^2$.
- Surface totale des portes et fenêtres : $S_{P,F}=40\ m^2$.
- Surface totale des murs sans portes ni fenêtres : $S_M=S-S_{P,F}=26\ m^2$.
- Surface totale des murs sans portes ni fenêtres : $S_{Pl,T}=120\ m^2$.

Coefficient global de transmission de chaleur $K=\frac{1}{r_{th,eq}}$:

- murs extérieurs : $K_1=0{,}60\ W/m^2.K$;
- fenêtres et portes : $K_2=3\ W/m^2.K$;
- plafond et toiture : $K_3=0{,}33\ W/m^2.K$.

1. Flux de chaleur total Φ_1 transféré de l'intérieur vers l'extérieur à travers l'ensemble des parois de la maison.

Ce flux est composé de Φ_M, $\Phi_{P,F}$ et $\Phi_{Pl,T}$.

- Φ_M est le flux de chaleur traversant les murs sans portes ni fenêtres:

$$\Phi_M=\frac{T_i-T_e}{R_{th,eq,M}}=\frac{T_i-T_e}{\frac{r_{th,eq,M}}{S_M}}=K_1\times S_M\times(T_i-T_e)=390\ W$$

$$K_1=\frac{1}{r_{th,eq,M}}$$

$r_{th,eq,M}$: résistance thermique globale constituée de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance interne ($r_i=\frac{1}{h_i}$), de résistance thermique de conduction totale des murs ($r_{cd,M}$) et de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance externe ($r_e=\frac{1}{h_e}$).

- $\Phi_{P,F}$ est le flux de chaleur traversant les portes et les fenêtres :

$$\Phi_{P,F}=\frac{T_i-T_e}{R_{th,eq,PF}}=\frac{T_i-T_e}{\frac{r_{th,eq,PF}}{S_{PF}}}=K_2\times S_{P,F}\times(T_i-T_e)=3000\ W$$

$$K_2=\frac{1}{r_{th,eq,PF}}$$

$r_{th,eq,PF}$: résistance thermique globale constituée de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance interne ($r_i = \frac{1}{h_i}$), de résistance thermique de conduction totale des portes et fenêtres ($r_{cd,PF} = r_{cd,P}//r_{cd,F}$) et de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance externe ($r_e = \frac{1}{h_e}$).

- $\Phi_{Pl,T}$ est le flux de chaleur traversant les plafonds et les toitures :

$$\Phi_{Pl,T} = \frac{T_i - T_e}{R_{th,eq,PlT}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{r_{th,eq,PlT}}{S_{Pl,T}}} = K_3 \times S_{Pl,T} \times (T_i - T_e) = 1980\ W$$

$$K_3 = \frac{1}{r_{th,eq,PlT}}$$

$r_{th,eq,PlT}$: résistance thermique globale constituée de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance interne ($r_i = \frac{1}{h_i}$), de résistance thermique de conduction totale des plafonds et toitures ($r_{cd,PlT}$) et de résistance thermique de convection+rayonnement du côté de l'ambiance externe ($r_e = \frac{1}{h_e}$).

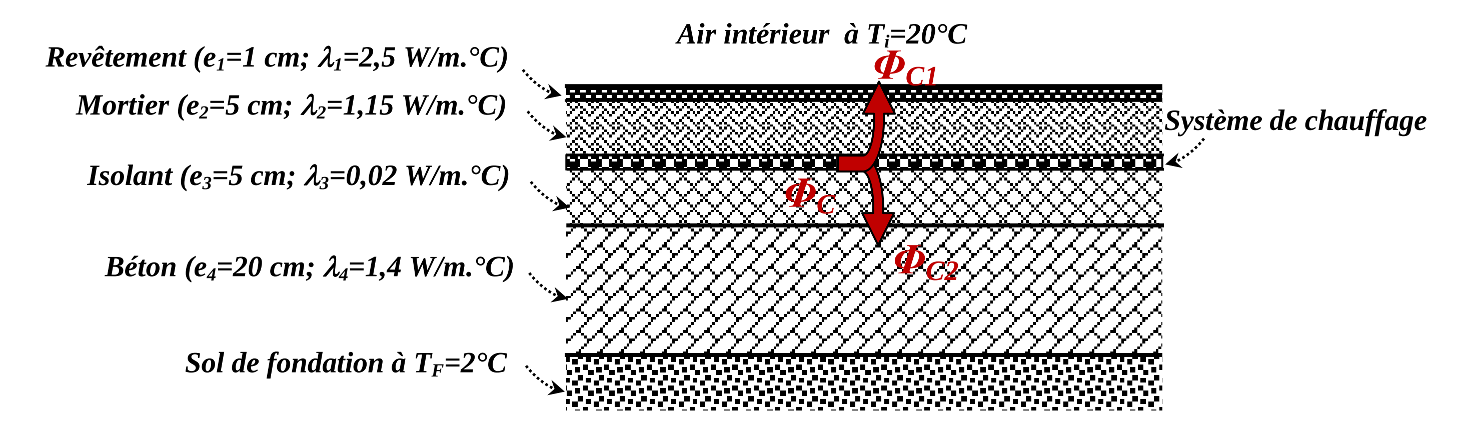
Il en résulte que le flux total vaut:

$$\Phi_1 = \Phi_M + \Phi_{P,F} + \Phi_{Pl,T} = 5370\ W$$

2. Pour compenser ces pertes thermiques (Φ_1), on utilise un système de chauffage constitué d'un tube dans lequel circule de l'eau à une température moyenne supposée uniforme. On assimile le système de chauffage à un plan horizontal de *120 m²* ayant une température uniforme T_C.

Le système de chauffage (plan horizontal à T_C) fournit un flux de chaleur Φ_C qui se divise en :

- un flux de chaleur ascendant Φ_{C1} (flux utile) traversant les couches de Mortier et de revêtement;
- un flux de chaleur ascendant Φ_{C2} (flux perdu) traversant les couches de l'isolant et de béton, et le sol de fondation.



2.a) Résistance thermique, par unité de surface, r_{Ci}, comprise entre le système de chauffage et l'intérieur de la maison.

$$r_{Ci} = r_{th,eq,i} = r_{cd,2} + r_{cd,1} + r_i = 147,5 \times 10^{-3}\ \ m^2.°C/W$$

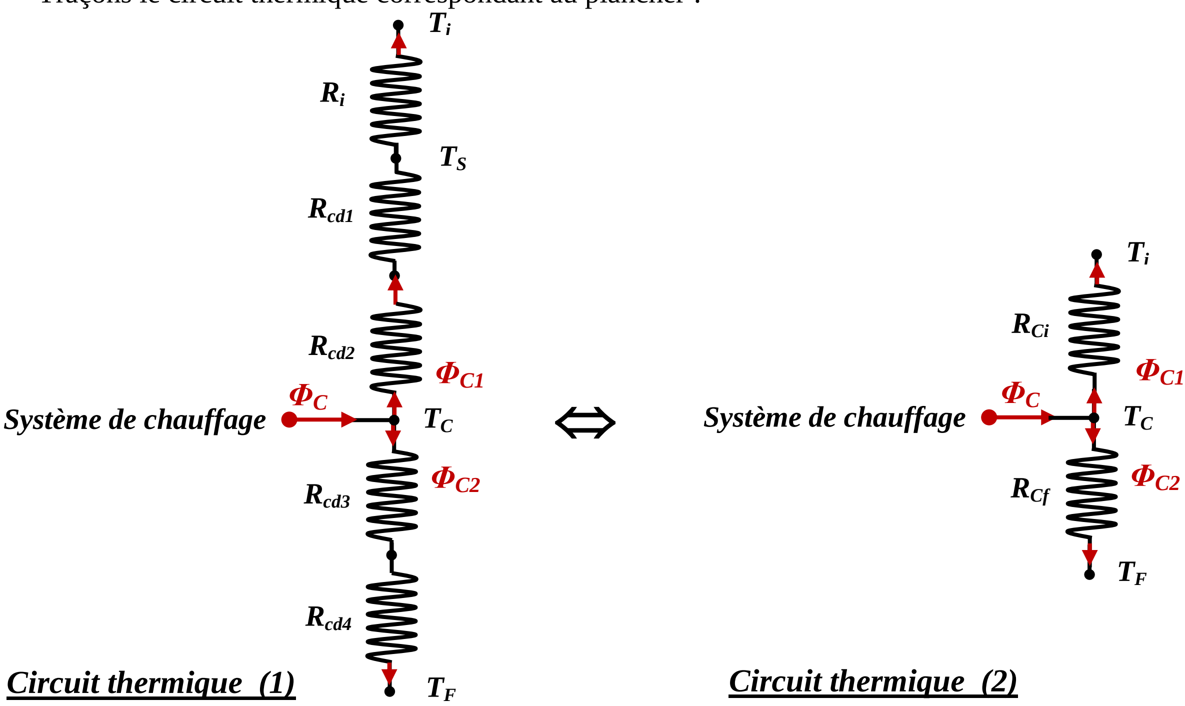
Avec :

$$r_i = r_{cv,i}//r_{r,i} = \frac{1}{h}$$

2.b) Résistance thermique, par unité de surface, r_{Cf}, comprise entre le système de chauffage et le sol de fondation.

$$r_{Cf} = r_{th,eq,f} = r_{cd,3} + r_{cd,4} = 2642,9 \times 10^{-3} \quad m^2.°C/W$$

2.c) Températures T_S et T_C:
Traçons le circuit thermique correspondant au plancher :



- D'après le circuit thermique ***(1)***, on a :

$$\Phi_{C1} = \frac{T_S - T_i}{R_i} = \frac{T_S - T_i}{\frac{1}{h \times S_0}}$$

D'où :

$$T_S = T_i + \frac{\Phi_{C1}}{h \times S_0} = 24,5\,°C$$

- D'après le circuit thermique ***(2)***, on a :

$$\Phi_{C1} = \frac{T_C - T_i}{R_{Ci}} = \frac{T_C - T_i}{\frac{r_{Ci}}{S_0}}$$

D'où :

$$T_C = T_i + \frac{r_{Ci}}{S_0} \times \Phi_{C1} = 26,6\,°C$$

2.d) Flux de chaleur Φ_{C2} transmis du système de chauffage au sol de fondation
D'après le circuit thermique ***(2)***, on a :

$$\Phi_{C2} = \frac{T_C - T_F}{R_{Cf}} = \frac{T_C - T_F}{\frac{r_{Cf}}{S_0}} \approx 1117\,W$$

On en déduit le flux total fourni par le système de chauffage:

$$\Phi_C = \Phi_{C1} + \Phi_{C2} = 6487\,W$$

2.e) le rendement d'un système de chauffage est défini comme suit:

$$R\% = \frac{\Phi_{utile}}{\Phi_{théorique}} \times 100$$

$$\Phi_{théorique} = \frac{\Phi_{utile}}{R\%} \times 100 = \frac{\Phi_{C1}}{R\%} \times 100 \approx 6713\ W$$

Le prix de revient d'une journée de chauffage se calcule en utilisant la formule suivante :

$$\breve{C} = P_{Chauffage} \times \Delta t \times \breve{c}$$

avec :

$\breve{C}$: prix de chauffage;

$P_{Chauffage}$: puissance de chauffage

$$P_{Chauffage} = \Phi_{théorique} = 6,713\ KW$$

Δt: durée de fonctionnement du système de chauffage (une journée)

$$\Delta t = 12\ heures$$

$\breve{c}$: prix de ***1 KWh***.

Le prix de revient d'une journée de chauffage vaut donc:

$$\breve{C} = P_{Chauffage} \times \Delta t \times \breve{c} = 108,75\ Dhs$$

Exercice 28: Chauffage électrique par plancher (Extrait du devoir libre de transfert de chaleur GC1-2011/2012)

Un système de chauffage électrique par plancher est constitué de câbles électriques chauffants noyés dans une dalle de béton d'épaisseur ***e=16 cm*** et de conductivité thermique λ***=1,2 W/m.°C***. Le système de chauffage peut être assimilé une plaque chauffante d'épaisseur e_0***=1 cm*** et de température uniforme T_E, dissipant une puissance, par unité de surface, φ_C***=100 W/m²***. Cette puissance se divise en un flux descendant φ_{C1} (chauffage par le plafond) et un flux ascendant φ_{C2} (chauffage par le plancher).

Le coefficient d'échange de chaleur par convection entre l'air ambiant (T_a***=20°C***) et la surface frontière S_1 de la dalle en béton (plancher) est h_{C1}***=3,6 W/m².°C***.

Le coefficient d'échange de chaleur par convection entre l'air ambiant (T_a***=20°C***) et la surface frontière S_2 de la dalle en béton (plafond) est h_{C2}***=5,6 W/m².°C***.

La température de l'air de chaque côté de la dalle est T_a***=20°C***

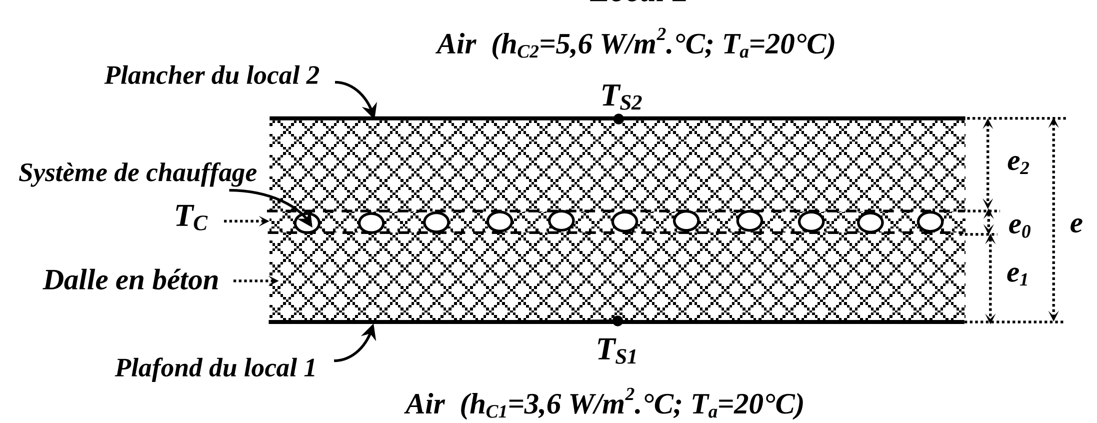
On négligera les échanges de chaleur par rayonnement.

1. On suppose que la plaque chauffante (système de chauffage) se situe au centre de la dalle (***figure 1***), déterminer:
   - la température de la plaque chauffante T_C;
   - les températures sur les surfaces frontières (plancher et plafond) T_{S1} et T_{S2}.
2. La température T_{S2} du plancher est trop élevée (inconfort thermique). On se propose de déplacer le plan chauffant à une distance ***x*** de la surface du plancher pour que la température de cette surface T_{S2} ne dépasse pas ***24°C*** (***figure 2***). Quelle est la valeur de cette distance ***x***?
3. La solution obtenue (valeur de ***x***) étant aberrante, le local ***2*** est isolé pour que la puissance dissipée φ_C soit inférieure à ***100 W/m²***.

Quelle doit être la valeur de cette puissance φ_C pour que la température de surface du plancher T_{S2} soit de ***24°C***? La plaque chauffante étant située au centre de la dalle en béton (***figure 1***).

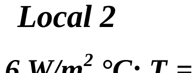
Local 2

Air (h_{C2}=5,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)



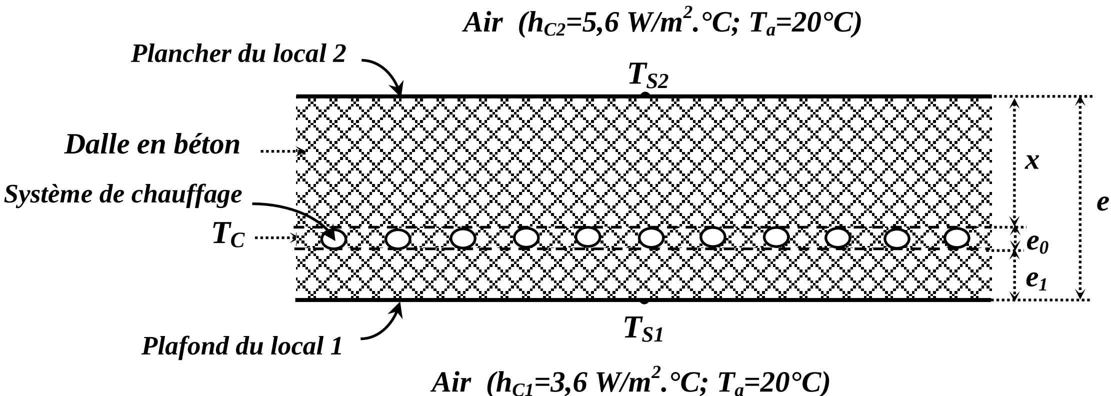
Air (h_{C1}=3,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)

Local 1 ***Figure 1:***



Local 2

Air (h_{C2}=5,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)



Air (h_{C1}=3,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)

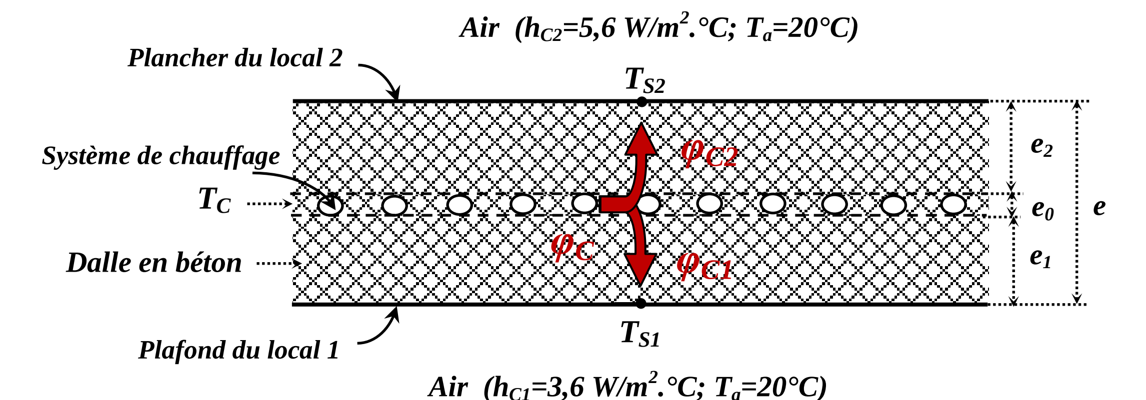
Local 1 ***Figure 2:***

Solution:

1. Cas où la plaque chauffante (système de chauffage) se situe au centre de la dalle (***figure 1***) :

Local 2

Air (h_{C2}=5,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)



Air (h_{C1}=3,6 W/m^2.°C; T_a=20°C)

Local 1 ***Figure 1:***

Le système de chauffage (plan horizontal à T_C) fournit un flux de chaleur φ_C qui se divise en:

- un flux de chaleur descendant φ_{C1}: chauffage par le plafond (local ***1***)

$$\varphi_{C1} = \varphi_{cd1} = \varphi_{cv1} + \underbrace{\varphi_{r,net1}}_{\approx 0}$$

$$\varphi_{C1} = \lambda \times \frac{(T_C - T_{S1})}{e_1} = h_{C1} \times (T_{S1} - T_a)$$

Avec :

$$e_1 = \frac{e - e_0}{2} = 7,5\ cm$$

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_C - T_{S1})}{\frac{e_1}{\lambda}} = \frac{(T_{S1} - T_a)}{\frac{1}{h_{C1}}} = \frac{(T_C - T_a)}{\frac{e_1}{\lambda} + \frac{1}{h_{C1}}} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{cd1} + r_{cv1}} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,1}}$$

- un flux de chaleur ascendant Φ_{C2}: chauffage par le placher (local ***2***)

$$\varphi_{C2} = \varphi_{cd2} = \varphi_{cv2} + \underbrace{\varphi_{r,net2}}_{\approx 0}$$

$$\varphi_{C2} = \lambda \times \frac{(T_C - T_{S2})}{e_2} = h_{C2} \times (T_{S2} - T_a)$$

Avec :

$$e_2 = \frac{e - e_0}{2} = 7,5\ cm$$

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_C - T_{S2})}{\frac{e_2}{\lambda}} = \frac{(T_{S2} - T_a)}{\frac{1}{h_{C2}}} = \frac{(T_C - T_a)}{\frac{e_2}{\lambda} + \frac{1}{h_{C2}}} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{cd2} + r_{cv2}} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,2}}$$

- On en déduit l'expression du flux de chaleur φ_C produit par le système de chauffage :

$$\varphi_C = \varphi_{C1} + \varphi_{C2} = (T_C - T_a) \times \left(\frac{1}{r_{th,1}} + \frac{1}{r_{th,2}}\right) = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,1//2}}$$

avec :

$$r_{th,1//2} = r_{th,1}\ //\ r_{th,2}$$

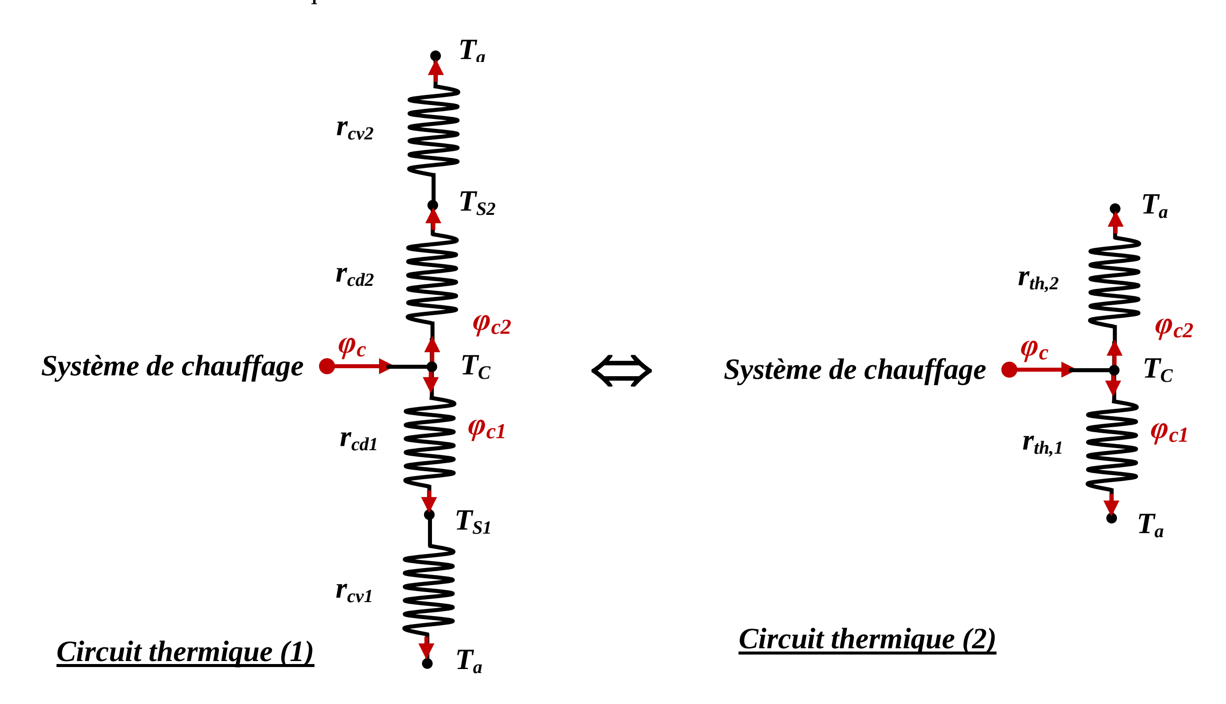
D'où on tire l'expression de T_C:

$$T_C = T_a + r_{th,1//2} \times \varphi_C$$

Application numérique :

$$r_{cd,1} = r_{cd,2} = 62,5 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$r_{cv,1} = 277,8 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$r_{cv,2} = 178,6 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$r_{th,1} = 340,3 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$r_{th,2} = 241,1 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$r_{th,1//2} = 141,1 \times 10^{-3}\ m^2.°C/W$$
$$T_C = 34,11\ °C$$

- Circuits thermiques:



- On en déduit les valeurs de φ_{C1}, φ_{C2}, T_{S1} et T_{S2}:

D'après le circuit thermique (2), on a :

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,1}} = 41,5\ W/m^2$$

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,2}} = 58,5\ W/m^2$$

D'après le circuit thermique (1), on a :

- D'une part:

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_C - T_{S1})}{r_{cd,1}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{S1} = T_C - r_{cd,1} \times \varphi_{C1} = 31,52°C$$

- D'autre part:

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_C - T_{S2})}{r_{cd,2}}$$

$$\Rightarrow \quad T_{S2} = T_C - r_{cd,2} \times \varphi_{C2} = 30,45\ °C$$

2. La température T_{S2}=*30,5°C* du plancher est trop élevée (inconfort thermique). On se propose de déplacer le plan chauffant à une distance ***x*** de la surface du plancher pour que la température de cette surface T_{S2} ne dépasse pas ***24°C*** (***figure 2***). Calculons la valeur de cette distance ***x***.

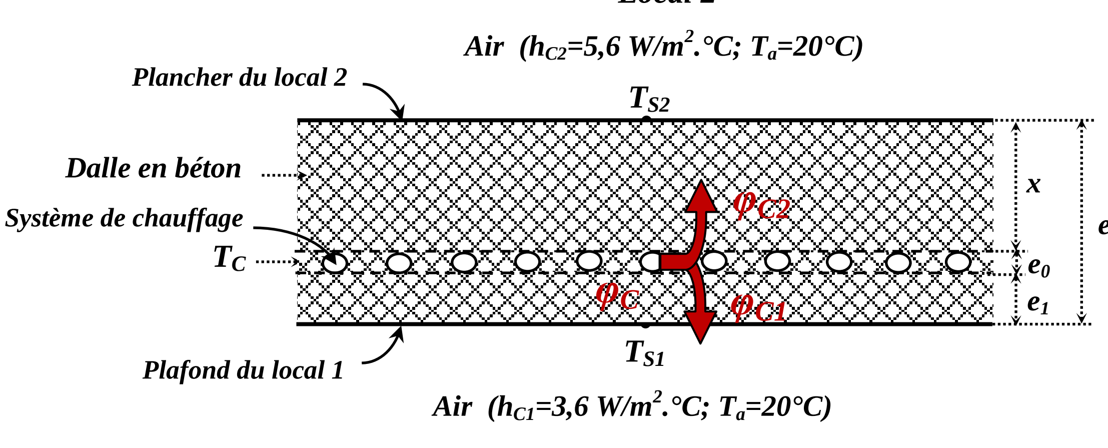


Figure 2:

Déterminons le flux de chaleur φ_{C2} et ensuite la valeur de x:

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_{S2} - T_a)}{r_{cv,2}} = 22,4 \ W/m^2$$

Ce flux s'exprime également comme suit :

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_C - T_{S2})}{r'_{cd,2}} = \lambda \times \frac{(T_C - T_{S2})}{x}$$

D'où on tire l'expression de x:

$$x = \lambda \times \frac{(T_C - T_{S2})}{\varphi_{C2}} \approx 54,2 \ cm$$

Ce résultat implique que $x > e$ (épaisseur de la dalle en béton ***e=16 cm***) ce qui est aberrant.

3. La solution obtenue ***x=54,2 cm>e*** étant aberrante, le local ***2*** est isolé pour que la puissance dissipée φ_C soit inférieure à ***100 W/m²***.

Déterminons la valeur de la puissance φ_C pour que la température de surface du plancher T_{S2} soit de ***24°C***. La plaque chauffante étant située au centre de la dalle en béton (***figure 1***).

On sait que:

$$\varphi_C = \varphi_{C1} + \varphi_{C2}$$

D'après le circuit thermique (1), on a :

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_{S2} - T_a)}{r_{cv,2}} = 22,4 \ W/m^2$$

et

$$\varphi_{C2} = \frac{(T_C - T_{S2})}{r_{cd,2}}$$

$$\Rightarrow \quad T_C = T_{S2} + r_{cd,2} \times \varphi_{C2} = 25,4°C$$

D'après le circuit thermique (2), on a :

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_C - T_a)}{r_{th,1}} = 15,9 \ W/m^2$$

Par suite :

$$\varphi_C = \varphi_{C1} + \varphi_{C2} \approx 38,3\ W/m^2$$

On en déduit la température T_{S1} sur la surface du plafond
D'après le circuit thermique, on a :

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_{S1} - T_a)}{r_{cv,1}}$$
$$\Rightarrow \quad T_{S1} = T_a + r_{cv,1} \times \varphi_{C1} \approx 24,4°C$$

Ou bien

$$\varphi_{C1} = \frac{(T_C - T_{S1})}{r_{cd,1}}$$
$$T_{S1} = T_C - r_{cd,1} \times \varphi_{C1} \approx 24,4°C$$

Exercice 29:

1- On considère une maison assimilée à un parallélépipède rectangle de dimensions moyennes L, l, H. Les murs, en pierre mélangée à de la terre, ont une épaisseur moyenne e_1 et une conductivité thermique λ_1.

On suppose négligeables les déperditions de chaleur par le sol, le plafond et les ouvertures. La valeur moyenne, sur la durée des trois mois d'été, de la différence de température entre la face intérieure et la face extérieure du mur est notée ΔT.

On donne: e_1*=40 cm*, λ_1*=1,2 W/(m.°C)*, *L=12m*, *l=8m*, *H=4m*, ΔT*=10°C*.

- ***a)*** Exprimer littéralement puis calculer la résistance thermique par m^2, ***r***, de ces murs.
- ***b)*** Exprimer littéralement puis calculer le flux thermique Φ transmis à travers l'ensemble des murs.
- ***c)*** Le prix moyen du ***KWh*** d'énergie électrique est ***1,10 DH***. Calculer le coût du fonctionnement d'un climatiseur permettant d'évacuer la chaleur qui entre dans la maison pendant les ***90*** jours de chaud.
- ***d)*** Donner votre conclusion.

2- Dans le cadre d'une isolation de la maison, on envisage de recouvrir les façades extérieures d'un enduit et de doubler intérieurement les murs par du placo-plâtre séparé du mur par du polystyrène.

On donne dans le tableau ci-dessous les épaisseurs e_i et les conductivités thermiques λ_i des divers matériaux :

Matériau	***Pierre+Terre***	***Enduit extérieur***	***Polystyrène***	***Plâtre***
Epaisseur e_i (cm)	e_1=40	e_2=1	e_3=5	e_4=1
λ_i ***(W/(m.°C))***	λ_1=1,2	λ_2=1,1	λ_3=0,041	λ_4=0,35

- ***a)*** Faire un schéma illustrant la composition du mur.
- ***b)*** Exprimer littéralement puis calculer la résistance thermique par m^2; notée r du mur isolé.
- ***c)*** Calculer l'économie ainsi réalisée pendant les ***90 j***ours de chaud.
- ***d)*** Si on considère que le prix de cette isolation est de ***36000 DH***, estimer la période d'amortissement.
- ***e)*** Conclure.

Solution:

***1- Schéma descriptif*::**

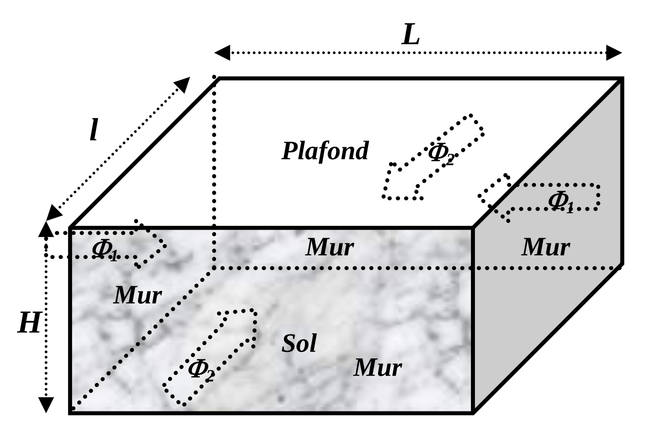


Figure : Maison assimilée à un parallélépipède rectangle.

a- Résistance thermique par m², *r*, des quatre murs de la maison:

On néglige les pertes de chaleur à travers le sol et le plafond. La densité de flux thermique traversant chacun des 4 murs s'écrit :

$$\varphi = 2\frac{\Phi_1}{S_1} + 2\frac{\Phi_2}{S_2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 4\frac{\lambda_1}{e_1}\Delta T$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = 4\frac{\Delta T}{r_1}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \frac{\Delta T}{r}$$

On en déduit la résistance thermique équivalente par m²:

$$r = \frac{r_1}{4} = \frac{e_1}{4\lambda_1}$$

A.N. : $r \approx 83{,}3\times 10^{-3}\ m^2.°C/W$

b- Le flux thermique total traversant les quatre murs s'écrit:

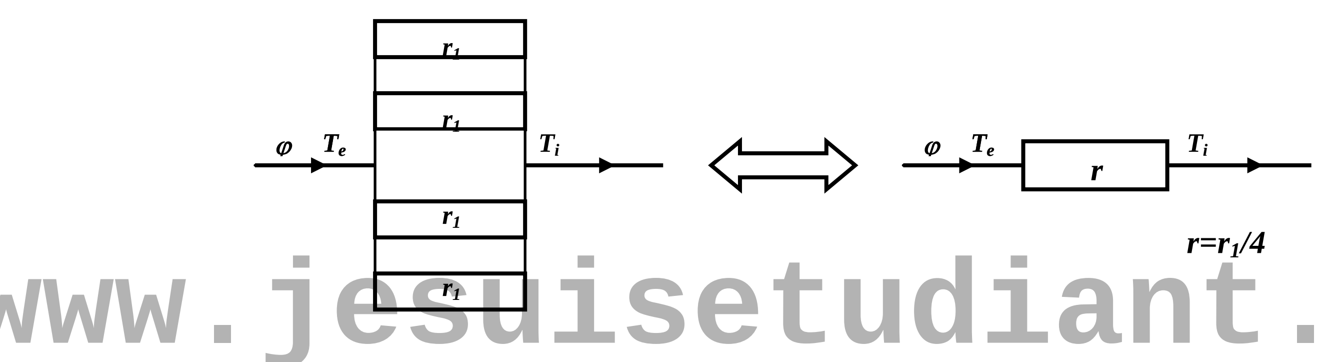
$$\Phi = 2(\Phi_1 + \Phi_2) = 2(S_1 + S_2)\frac{\Delta T}{r_1} = H\left(\frac{L+l}{2}\right)\frac{\Delta T}{r}$$

qui s'écrit également:

$$\Phi = S_{moy}\varphi = S_{moy}\frac{\Delta T}{r} \qquad \text{avec} \quad S_{moy} = \frac{S_1 + S_2}{2}$$

A.N.: $\Phi \approx 4800\ W$

c- Circuit thermique:



d- La quantité de chaleur reçue par l'intérieur pendant la période d'été et qui doit être évacuée s'écrit:

$$Q=\Phi.\Delta t$$

A.N.: $Q \approx 10368\ KWh$

Le coût du fonctionnement du climatiseur permettant d'évacuer la chaleur entrant dans la maison pendant les 3 mois d'été s'écrit:

$$P=Q.p$$

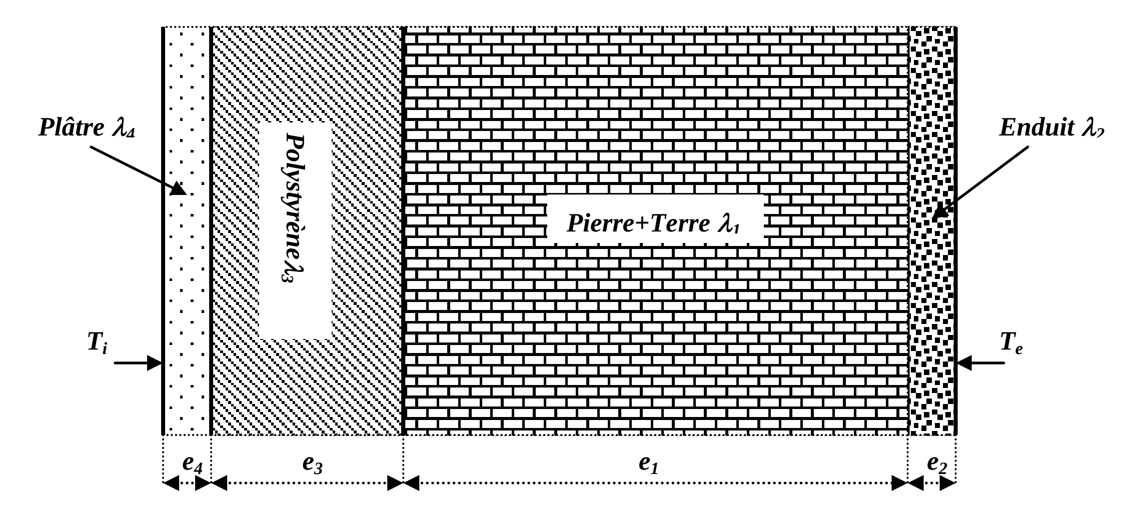
Avec ***p***: prix moyen du ***KWh*** d'énergie électrique (***p=1,1 Dh***).

A.N.: $P \approx 11405\ KWh$

e- Pour évacuer une énergie calorifique de ***10368 KWh*** pendant *3* mois, on doit dépenser une somme de ***11405 Dhs*** par an. De telle opération semble trop chère. On doit donc penser à une méthode plus économique, par exemple, une isolation thermique de la maison.

2- Isolation thermique:

a- Schéma descriptif du mur composite:



b- Résistance thermique par unité du mur isolé:

$$r=\frac{e_1}{\lambda_1}+\frac{e_2}{\lambda_2}+\frac{e_3}{\lambda_3}+\frac{e_4}{\lambda_4}$$

A.N. : $r' \approx 1{,}591\ m^2.°C/W$

c- Flux thermique traversant le mur composite, Φ':

$$\Phi'=2(\Phi'_1+\Phi'_2)=2(S_1+S_2)\frac{\Delta T}{r'_1}=H\left(\frac{L+l}{2}\right)\frac{\Delta T}{r'}$$

A.N. : $\Phi' \approx 1006\ W$

Pour calculer l'économie réalisée en isolant le mur, il faut déterminer la différence entre les flux thermiques Φ et Φ':

$$\Delta\Phi=\Phi-\Phi'$$

A.N.: $\Delta\Phi \approx 3794\ W$

L'énergie thermique à évacuer pendant les 3 mois d'été est donnée par:

$$Q'=\Delta\Phi.\Delta t$$

A.N.: $Q' \approx 8195\ KWh$

Le coût de fonctionnement d'un climatiseur permettant l'évacuation de cette énergie est:

$$P' = Q'.p$$

A.N.: $P' \approx 9015\ Dhs$

L'isolation du mur nous permet donc d'économiser *9015 Dhs* par an.

d- Durée d'amortissement ou bien de régénération des dépenses est:

τ=(Prix d'isolation)/(Prix d'énergie économisée chaque année pendant les 3mois d'été)

$$\tau = P/P'$$

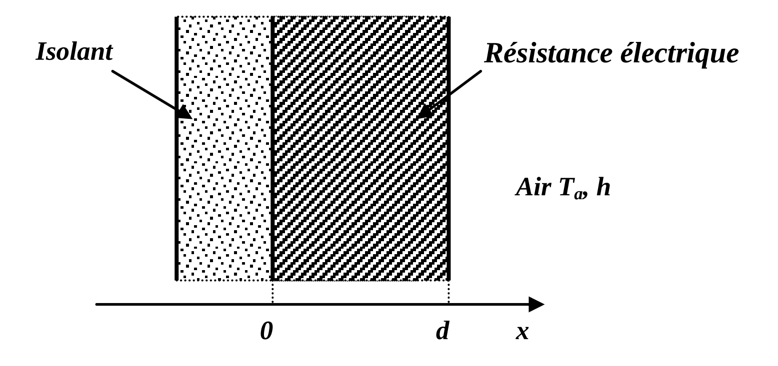
A.N.: $\tau \approx 4$ ***années***

III.2. Sources internes de chaleur

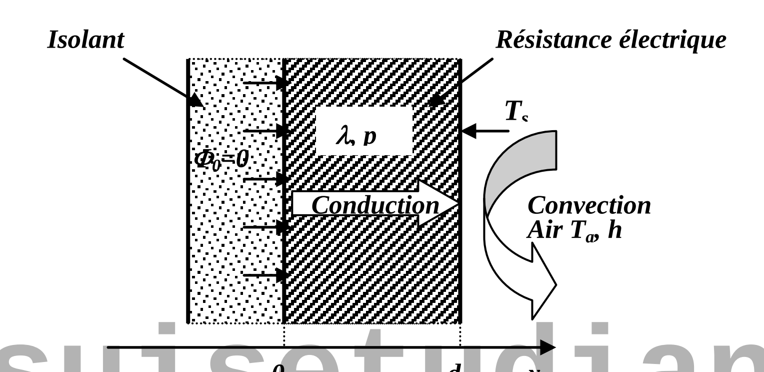
***Exercice 30*:**

Une résistance électrique (épaisseur d, largeur l et hauteur L) est parfaitement isolée sur une de ses faces. Sur l'autre face, il y a un échange thermique par convection (avec un coefficient h) avec l'air environnant à la température T_∞. En régime permanent, on suppose que la conductivité λ de la résistance est constante et que la génération de chaleur par effet joule est uniforme $p\ (W/m^3)$.

1- Déterminer l'expression du profil de température dans la résistance électrique (on négligera les effets de bouts).
2- Déterminer l'expression du flux thermique traversant la résistance.
3- Sans utiliser l'expression du profil obtenue en *1-*, trouver la température T_S sur la surface en contact avec l'air.
4- A quelle profondeur dans la plaque observe-t-on la température maximale?
5- Application numérique: $d=20mm$, $l=60mm$, $L=300mm$, $h=12W/m.K$, $\lambda=333kcal/h.m.°C$, $T_\infty=20°C$ et $p=0,2\ W/cm^3$.
6- Tracer sur la figure ci-après la forme du profil de température dans la plaque.



Solution:



1- Au sein de la résistance électrique, les échanges thermiques sont régis par l'équation de la conduction thermique qui s'écrit dans le cas d'une propagation unidirectionnelle (par exemple, suivant *OX*):

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{p}{\lambda} = 0 \qquad (1)$$

Les conditions aux limites associées à ce problème sont:

$$\begin{cases} \left. -\lambda S \frac{dT}{dx} \right]_{x=0} = \Phi_0 = 0 & \text{sur l'interface isolant/résistance (C.L. de Newmann)} \\ \left. -\lambda S \frac{dT}{dx} \right]_{x=d} = hS(T_S - T_\infty) & \text{sur l'interface résistance/air ambiant (C.L. de Fourier)} \end{cases} \qquad (2)$$

L'intégration de l'équation (1) donne:

$$T(x) = -\frac{p}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \qquad (3)$$

C_1et C_2 sont déterminées à l'aide des conditions aux limites (2):

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = \frac{pd}{h} + \frac{p}{2\lambda} d^2 + T_\infty \end{cases}$$

La distribution de température (3) devient:

$$T(x) = -\frac{p}{2\lambda} x^2 + pd\left(\frac{1}{h} + \frac{d}{2\lambda}\right) + T_\infty \qquad (0 \le x \le d) \qquad (4)$$

2- Flux thermique traversant la résistance:

On a:

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

D'où:

$$\Phi(x) = pLl.x \qquad 0 \le x \le d$$

3- Température T_S sur la face de la résistance en contact avec l'air:

- *Méthode (1)*:

D'après (4), on a:

$$T_S = T(x = d)$$

$$T_S = \frac{pd}{h} + T_\infty$$

- *Méthode (2)* :

La puissance thermique produite **P**à l'intérieur de la résistance est intégralement évacuée vers l'extérieur à travers la paroi de température T_S :

$$P = hS(T_S - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad p.V = hS(T_S - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad p.(Sd) = hS(T_S - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \quad T_S = T_\infty + \frac{pd}{h}$$

4- Position du maximum de température:

T admet un maximum en x_m si et seulement si $\left. \frac{dT}{dx} \right]_{x=x_m} = 0$ et $\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right]_{x=x_m} < 0$

$$\begin{cases} \left[\dfrac{dT}{dx}\right]_{x=x_m} = -\dfrac{p}{\lambda} x_m = 0 \\ \left[\dfrac{d^2T}{dx^2}\right]_{x=x_m} = -\dfrac{p}{\lambda} < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_m = 0$$

Le maximum de température $T_{max} = T_\infty + pd(\frac{1}{h} + \frac{d}{2\lambda})$ est localisé sur la face de la résistance en contact avec l'isolant.

5- ***Application numérique***:

- Distribution de température:

$$T(x) = -258,6x^2 + 353,4 \quad (°C) \qquad (0 \le x \le 0,02 \;\; m)$$

- Flux thermique:

$$\Phi(x) = 3600x \qquad (0 \le x \le 0,02 \;\; m)$$

- Puissance thermique totale produite dans la résistance:

$$P = 72 \; W$$

- Température T_S :

$$T_S \;;\; 353,3 \; °C$$

- Température maximale T_{max} :

$$T_{max} \;;\; 353,4 \; °C$$

T_S et T_{max} sont très voisines.

***Exercice 31*:**

On considère une sphère de diamètre d=10cm. Sa conductivité thermique est λ=520 kcal/(h.m.°C). Pour chauffer cette sphère, on utilise une source de chaleur délivrant une puissance P par unité de volume. P est supposée constante. La surface de la sphère est en contact avec l'air à la température de T_∞=20°C. Le coefficient d'échange convectif air-sphère est ***h=15W/(m²·°C).*** On suppose que le régime permanent est atteint.

1- Exprimer la température Ts de la surface de la sphère en fonction de P.
2- Déterminer, en résolvant l'équation de la chaleur, l'expression de la distribution de température dans la sphère en fonction de P.
3- Montrer que cette distribution de température admet un maximum T_{max} dont on précisera la position dans la sphère.
4- Calculer la puissance P' en watt que l'on doit utiliser pour que ce maximum soit égal à 100°C.
5- Calculer la température de la paroi de la sphère T_S.

Solution:

Schéma descriptif:

1- En régime établi, on n'a pas d'accumulation d'énergie:

L'énergie thermique fournie par la source=l'énergie évacuée vers l'air par convection naturelle

$$P=p.V=\Phi_{évacuée}$$
$$p.4\pi r^3/3=hS(T_S-T_\infty)$$
$$p.\pi d^3/6=h.\pi d^2(T_S-T_\infty)$$

On en déduit la température de la surface de la sphère T_S:

$$T_S=dp/6h+T_\infty$$

2- La distribution de température dans la sphère s'obtient en résolvant l'équation de la chaleur qui s'écrit, dans ce cas, avec les les conditions aux limites associées:

$$\Delta T+\frac{p}{\lambda}=0 \text{ avec } \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \text{ et } T(r=\frac{d}{2})=Ts$$

L'intégration de cette équation donne:

$$T(r)=-(p/6\lambda)r^2-C_1/r+C_2$$

avec: $C_1=0$ et $C2=T_S+pd^2/24\lambda$

La distribution de température à l'intérieur de la sphère s'écrit :

$$T(r)=(p/6\lambda)(d^2/4-r^2)+T_S \qquad \text{avec } 0\leq r\leq d/2$$

Ou encore:

$$T(r)=(p/6\lambda)(d^2/4-r^2)+dp/6h+T_\infty \qquad \text{avec } 0\leq r\leq d/2$$

3- Maximum de température:

T(r) admet un maximum noté T_{max} si et seulement si $\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_m}=0$ et $\left.\frac{\partial 2T}{\partial 2r}\right|_{r=r_m}\pi 0$.

Ona:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_m}=0 \Rightarrow -\frac{p}{3\lambda}r_m=0 \Rightarrow r_m=0$$

$$\text{et} \quad \left.\frac{\partial 2T}{\partial 2r}\right|_{r=r_m}=-\frac{p}{3\lambda}\pi 0$$

Donc, $r_m=0$ est un maximum de $T(r)$.

Le maximum de température T_{max} est localisée au centre de la sphère.

$$T_{max}=T(r_m)=T(0)$$
$$\Rightarrow T_{max}=pd^2/24\lambda+T_S$$
$$\Rightarrow T_{max}=pd/6\lambda(d/4+\lambda/h)+T_\infty$$

4- La puissance ***P'*** que l'on doit utiliser pour que le maximum T_{max} soit égal à *100°C* est tellque:

$$P'=p.V$$

Cherchons d'abord *p* pour $T_{max}=100°C$.

$$T_{max}-T_\infty= pd/6\lambda(d/4+\lambda/h)$$
$$p=6(T_{max}-T_\infty)/d(1/h+d/4\lambda)$$

A.N.: $p\approx 71955\ W/m^3$

et $P'\approx 37,67\ W$

5- Température de la surface de la sphère, T_S:

On a:

$$T_S=dp/6h+T_\infty$$

A.N. $T_S\approx 99,95\ °C$

$T_S\approx T_{max}$, la sphère semble avoir une distribution uniforme de température:

$$T(M)=Ts\ \forall M \in Sphère.$$

Exercice 32:

Une résistance électrique de très grande longueur L et de diamètre d=2,6 mm, est constituée d'un fil dont la conductivité est λ=20 W/(m.°C) et dont la résistance électrique linéaire est ρ=0,25 Ω/m. Cette résistance est parcourue par un courant électrique d'intensité I.

1- Déterminer l'expression de la puissance P dissipée dans le fil par unité de volume.

2- On suppose que la résistance est plongée dans un bain d'huile en circulation qui maintient sa température de surface à Ts.

2-a) Ecrire l'équation différentielle permettant de calculer la température T(r) dans le fil.

2-b) Montrer que la solution est de la forme:

$$T(r)=T_{max}-(T_{max}-T_S)\left(\frac{2r}{d}\right)^2$$

où T_{max} est la température maximale dont on déterminera l'expression et la position dans le fil.

2-c) Calculer T_{max} pour I=300 A.

3- On suppose maintenant que la résistance est placée dans l'air à la température T_∞=20°C. Le coefficient de transfert par convection entre le fil et l'air est h=10 W/(m^2.°C).

3-a) En faisant un bilan énergétique, déterminer l'expression de la température de surface du fil T_S.

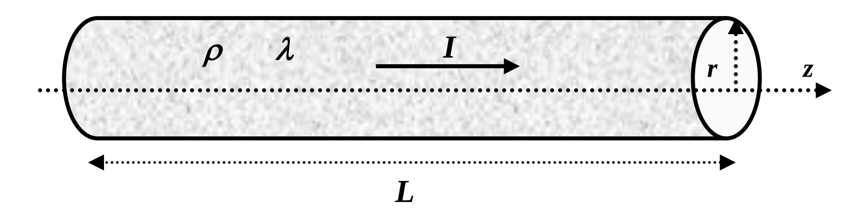
3-b) En déduire l'expression de T_{max}.

3-c) Si on désigne par T_C la température maximale que peut supporter la résistance, déterminer l'intensité maximale du courant I_{max} que l'on peut utiliser.

3-d) On donne T_C=1000°C, calculer I_{max}.

Solution

Schéma descriptif



1- La puissance thermique dissipée, par effet Joule, dans la résistance est :

$$P=U.I=R.I^2=(\rho.L)I^2$$

On en déduit la puissance dissipée par unité de volume:

$$p= P/V=(\rho.L)I^2/(\pi L d^2/4)$$

$$\Rightarrow\quad p=4\rho I^2/\pi d^2$$

2- a. On se place dans le cas d'un transfert thermique permanent unidimensionnel (radial), l'équation de la chaleur s'écrit donc:

$$\Delta T+\frac{p}{\lambda}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{p}{\lambda}=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Les conditions aux limites associées à ce problème sont:

$$T(r=d/2)=T_S \quad \text{et} \quad T(r=0) \text{ finie} \quad \text{ou} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \qquad \textbf{(2)}$$

L'intégration de l'équation (1) donne:

$$T(r)=-(p/4\lambda)r^2+C_1Ln(r)+C_2 \qquad \text{pour } 0\le r\le d/2$$

Les constantes C_1 et C_2 sont déterminées à l'aide des conditions aux limites (2):

$$C_1=0 \quad \text{et} \quad C_2=T_S+pd^2/16\lambda$$

La distribution de température à l'intérieur du mur s'écrit finalement:

$$T(x)=\frac{p}{2\lambda}x(2e-x)+\frac{pe}{h}+T_\infty \qquad \text{pour } 0\le x\le e$$

$$T(r)=-(p/4\lambda)(r^2-d^2/4)+T_S \qquad \text{pour } 0\le r\le d/2 \qquad \textbf{(3)}$$

2-b- T(r) admet un maximum T_{max} au point r_m si et seulement si:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_m}=0 \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right|_{r=r_m}\pi 0.$$

Ona:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=r_m}=0 \;\Rightarrow\; -\frac{p}{2\lambda}r_m=0 \;\Rightarrow\; r_m=0$$

$$\text{et} \quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial^2 r}\right|_{r=r_m}=-\frac{p}{2\lambda}\pi 0$$

Donc, $r_m=0$ est un maximum de $T(r)$.

Le maximum de température T_{max} est localisé sur l'axe du fil repéré par r=0:

$$T_{max}=T(r_m)=T(0)$$
$$T_{max}=pd^2/16\lambda+T_S$$

La distribution de température (3) s'écrit également:

$$T(r)=T_{max}-4(T_{max}-T_S)r^2/(d^2) \quad \text{pour} \quad 0\leq r\leq d/2$$

2-c- Calcul de T_{max}-T_S:

On a:

$$T_{max}-T_S=pd^2/16\lambda$$

Remplaçons p par son expression (voir question 1), on obtient:

$$T_{max}-T_S=\rho I^2/4\pi\lambda$$

A.N.: $T_{max}-T_S\approx 89{,}5\ °C$ (l'écart de temperature entre l'axe et la surface du fil)

Comme $T_S=50°C$, donc $T_{max}=89{,}5\ °C$.

3- On suppose maintenant que la résistance est placée dans l'air à la température $T_\infty=20°C$. Le coefficient de transfert thermique par convection entre le fil et l'air est $h=10\ W/m^2.°C$.

3-a- L'expression de la température de surface du fil T_S s'obtient en écrivant que la condition aux limites sur la surface devient:

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=d/2}=h(T_S-T_\infty) \text{ et on a tjs } \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=0}=0 \qquad \textbf{\textit{(4)}}$$

$\underbrace{-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=d/2}}_{Conduction}=\underbrace{h(T_S-T_\infty)}_{Convection}$: cette condition aux limites exprime que la chaleur produite dans le fil, par effet Joule, est transférée par <u>conduction</u> de l'intérieur vers la surface du fil, et ensuite par <u>convection</u> de la surface vers l'air environnant.

$$-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=d/2}=h(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow\quad -\lambda\left(-\frac{pd}{4\lambda}\right)=h(T_S-T_\infty)$$

$$\Rightarrow\quad T_S=\frac{pd}{4h}+T_\infty$$

3-b- On en déduit l'expression de T_{max} :

D'après la quest. 2-b, on a:

$$T_{max}=pd^2/16\lambda+T_S$$
$$T_{max}=pd/8(d/2\lambda+2/h)+T_\infty$$

3-c- On désigne par T_C la température maximale que peut supporter la résistance électrique, cherchons l'intensité maximale du courant notée I_{max} que l'on peut utiliser.

La température maximale atteinte dans le fil (résistance) est donnée par:

$$T_{max}=(pd/8)(d/2\lambda+2/h)+T_\infty$$

avec: $p=4\rho I^2/\pi d^2$

Donc:

$$T_{max}=(\rho I^2/4\pi)(1/\lambda+1/hd)+T_\infty$$

Cette température doit être maintenue en-dessous de T_C, c.à.d.:

$$T_{max}\leq T_C \;\Rightarrow\; (\rho I^2/4\pi)(1/\lambda+1/hd)\leq T_C-T_\infty$$
$$\Rightarrow\; I^2\leq 4\pi(T_C-T_\infty)/\rho\,(1/\lambda+1/hd)$$

$$\Rightarrow\quad I\leq\sqrt{\frac{4\pi}{\rho}\frac{(T_C-T_\infty)}{\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{hd}\right)}}=I_{max}$$

3-d- Application numérique: on donne $Tc=1000°C$.

$$I_{max} \approx 18\ A$$

Exercice 33:

Soit un barreau d'uranium (de *29,3 mm* de diamètre) chemisé dans une gaine unie de magnox (alliage de magnésium) de *33 mm* de diamètre extérieur. La chaleur produite au cœur du combustible pendant le processus de fission nucléaire doit atteindre par conduction la surface du barreau avant d'être transmise au réfrigérant. Le flux de chaleur libéré par le combustible, par unité de longueur de barreau, est de *43,152 KW/m.* On suppose que la génération de chaleur est uniforme dans le combustible. Les conductivités thermiques moyennes de l'uranium et du magnox, dans les conditions de fonctionnement, sont respectivement *32,5* et *141,5 W/m.°C.* La mise en œuvre technique du barreau de combustible ne permet pas de réaliser une continuité thermique parfaite entre la cartouche active et la gaine. On tiendra donc compte de la résistance thermique entre combustible et gaine estimée, par unité de longueur de barreau, à $8,2\times10^{-4}$ *°C.m/W.*

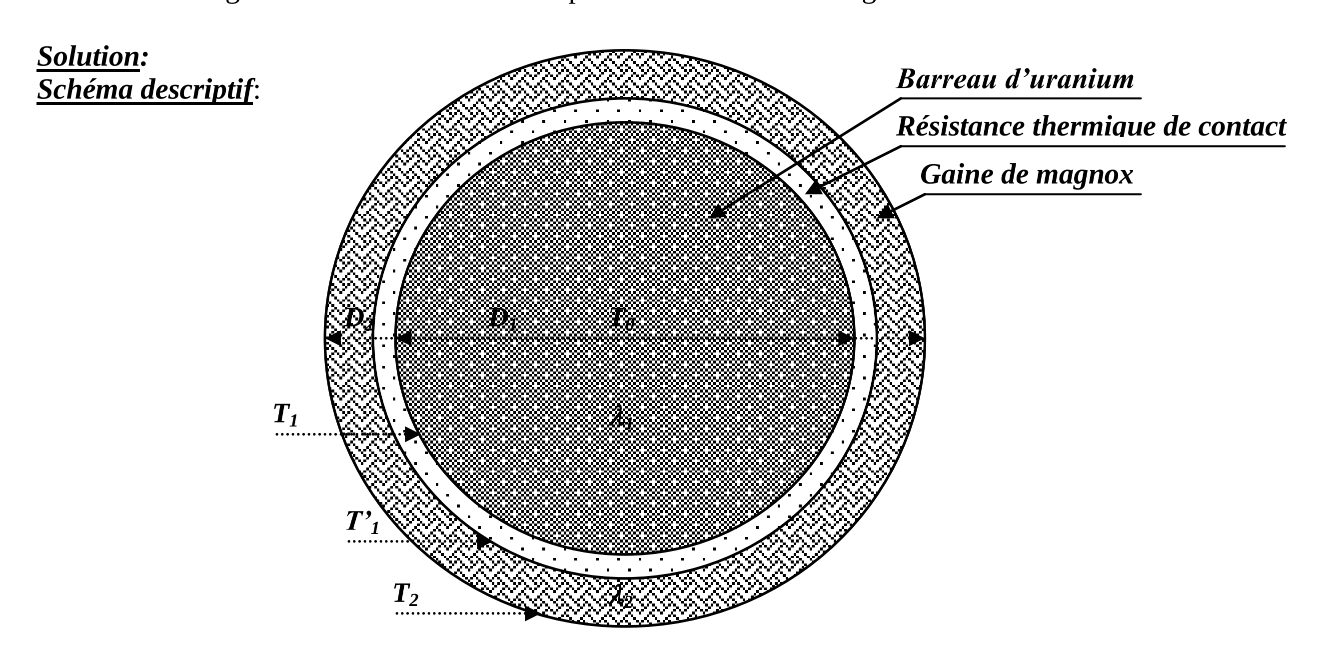
1- Déterminer la distribution de température dans le combustible.
2- En déduire que :

$$T_0 - T_1 = \frac{\Phi}{4\pi\lambda_1 L}$$

où: T_0 est la température au centre du barreau,
T_1 est la température à la périphérie du barreau,
Φ est le flux de chaleur dégagée dans le barreau,
λ_1 est la conductivité du matériau constituant le barreau,
L est la longueur du barreau.

3- Déterminer les températures au centre et à la périphérie du combustible en supposant que la surface extérieure de la gaine est maintenue à *440°C* par la circulation du réfrigérant.

Solution:
Schéma descriptif:



- Barreau d'uranium métal: cylindre plein (D_1, λ_1, L).
- Gaine de magnox: cylindre creux (D_1, D_2, λ_2, L).
- Contact thermique imparfait entre le barreau d'uranium et la gaine de magnox caractérisé par une résistance thermique de contact $R_{th,cont}$.

1- Le barreau d'uranium correspond à un milieu conductif avec sources interne de chaleur. L'équation de la conduction s'y écrit en régime permanent:

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda_1} = 0 \quad (1)$$

Les conditions aux limites associées à (1) sont :

$$(2)\begin{cases}\left[\dfrac{\partial T}{\partial r}\right]_{r=0}=0 \text{ (pas d'échappement de chaleur au centre du barreau)}\\ T\left(r=\dfrac{D_1}{2}\right)=T_1\end{cases}$$

Comme il s'agit d'un transfert thermique radial, donc:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)+\frac{p}{\lambda_1}=0$$

L'intégration de cette équation donne:

$$T(r)=-\frac{p}{4\lambda_1}r^2+C_1 Lnr+C_2 \text{ (pour } 0\le r\le R_1)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées à l'aide des conditions aux limites *(2)*:

$$\begin{cases}C_1=0\\ C_2=T_1+\dfrac{pD_1^2}{16\lambda_1}\end{cases}$$

Il s'ensuit que la distribution de température T(r) à l'intérieur du barreau d'uranium est donnée par:

$$T(r)=\frac{p}{4\lambda_1}\left(\frac{D_1^2}{4}-r^2\right)+T_1 \qquad \left(\text{pour } 0\le r\le\frac{D_1}{2}\right) \quad (3)$$

2- Soit Φ la puissance thermique produite dans le barreau, donc:

$$\Phi = pV = p\pi R_1^2 L=\frac{p\pi D_1^2 L}{4}$$

Soit Φ' le flux thermique libéré par le combustible par unité de longueur du barreau, donc:

$$\Phi'=\frac{\Phi}{L}=\frac{p\pi D_1^2}{4}$$

Soit T_0 la température au centre du barreau, donc:

$$T_0=T(r=0)=\frac{pD_1^2}{16\lambda_1}+T_1$$

$$\Rightarrow T_0-T_1=\frac{\Phi}{4\pi\lambda_1 L} \quad (4)$$

3- Calculons les températures T_0 et T_1 respectivement au centre et à la périphérie du combustible en supposant que la température de la surface extérieure de la gaine T_2 est égale à *440°C*.

Le flux thermique libéré par le combustible par unité de longueur du barreau Φ' traverse d'abord la résistance thermique de contact (par unité de longueur) $R_{th,cont}$ et ensuite la résistance thermique de la gaine du magnox $R_{th,mag}$. Donc :

$$\Phi'=\frac{T_1-T_2}{R_{th,cont}+R_{th,mag}} \quad (5)$$

$$\text{avec : } R_{th,mag}=\frac{Ln\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_2}$$

Il s'ensuit que:

$$T_1 = T_2 + \Phi'\left(R_{th,cont} + \frac{Ln\left(\frac{D_2}{D_1}\right)}{2\pi\lambda_2}\right)$$

Tenant compte de la relation *(4)*, on aura:

$$T_0 = T_1 + \frac{\Phi'}{4\pi\lambda_1}$$

$$A.N.: \begin{array}{l} T_1 \approx 481°C \\ T_2 \approx 586,8°C \end{array}$$

IV. Convection thermique

Exercice 34:

1- Du benzène à la température de $70°C$ circule dans un tube cylindrique en cuivre ($d_1=10$ mm, $d_2=12$ mm, $L=15$ m et $\lambda_{Cu}=398$ W/m.°C) avec une vitesse de *4,5 m/s*.

a- Calculer les nombres de *Prandtl*, *Pr* et *Reynolds*, *Re*; quelle est la nature de l'écoulement?

b- Calculer le nombre de *Nusselt*, *Nu*, et le coefficient d'échange thermique par convection, h_1.

2- Le benzène est refroidi par un courant d'eau, de température égale à *15°C*, s'écoulant avec une vitesse de *2 m/s*, dans l'espace annulaire compris entre le tube de cuivre et un tube coaxial de diamètre intérieur $d_3=15$ mm.

a- Calculer les nombres de *Prandtl*, *Pr* et *Reynolds*, *Re*; quelle est la nature de l'écoulement?

b- Calculer le nombre de *Nusselt*, *Nu*, et le coefficient d'échange thermique par convection, h_2.

3- Calculer les résistances thermiques de:
- conduction du tube de cuivre,
- convection du côté de benzène,
- convection du côté de l'eau.

En déduire le flux thermique Φ transféré du benzène à l'eau.

On donne:

- pour le benzène à $T=70°C$: $\lambda=0,165$ W/m.°C; $\mu=38,7\times10^{-5}$ Kg/m.s; $\rho=856$ Kg/m^3; $C_p=1923$ J/Kg.°C;
- pour l'eau à $T=15°C$: $\lambda=0,586$ W/m.°C; $\mu=1,13\times10^{-3}$ Kg/m.s; $\rho=997$ Kg/m^3; $C_p=4176$ J/Kg.°C.

Solution :

1- Cas du benzène circulant dans la conduite (d_2, d_2, λ_{Cu}, L).

1-a) Calcul des nombres de *Prandtl Pr* et de *Reynolds Re :*

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \approx 4{,}51 \\ Re = \dfrac{\rho V d_1}{\mu} \approx 99535 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est turbulent.

1-b) Calcul du nombre de *Nusselt Nu* et du coefficient convectif h_1:

On a:

$$\frac{L}{D_h} = \frac{L}{d_1} = 1500 > 60 \quad \text{et} \quad Re \approx 9{,}9\times10^4 \in \left[10^4 ; 12\times10^4\right]$$

Donc on peut appliquer la corrélation de *Colburn* : $Nu = 0{,}023\,Re^{0,8}\,Pr^{0,33}$

$$\begin{cases} Nu = 0{,}023\,Re^{0,8}\,Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda Nu}{D_h} \end{cases}$$

$$A.N : \begin{cases} Nu \approx 376{,}7 \\ h_1 \approx 6215{,}5 \quad W/m^2.°C \end{cases}$$

2- Cas de l'eau circulant dans l'espace annulaire compris entre les deux tubes.

1-a) Calcul des nombres de *Prandtl Pr* et de *Reynolds Re :*

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \frac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \approx 8{,}05 \\ Re = \frac{\rho V \left(d_3 - d_2\right)}{\mu} \approx 5293{,}8 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est turbulent.

1-b) Calcul du nombre de *Nusselt Nu* et du coefficient convectif h_2:
Tous calculs faits, on obtient:

$$\begin{cases} Nu \approx 43{,}62 \\ h_1 \approx 8520{,}44\ W/m^2.°C \end{cases}$$

3- Résistances thermiques:

$$R_{CV1} = \frac{1}{\pi d_1 L h_1} = 3{,}41 \times 10^{-4} °C/W$$

$$R_{CV2} = \frac{1}{\pi d_2 L h_2} = 2{,}075 \times 10^{-4} °C/W$$

$$R_{Cd} = \frac{Ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_{Cu} L} = 4{,}86 \times 10^{-6} °C/W$$

Flux thermique transféré du benzène à l'eau:

$$\Phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{CV1} + R_{cd} + R_{CV2}} \approx 99310\ W$$

Exercice35:

A- Un tube d'acier (d_1*=20mm*, d_2*=25mm*, *L=10m* et λ_a*=20 W/m.°C*) est parcouru par l'huile à *50°C* avec un débit de *0,5 litres/s*.

1- Calculer la vitesse de l'écoulement.
2- Calculer les nombres de *Prandtl*, *Pr* et *Reynolds*, *Re*; quelle est la nature de l'écoulement?
3- Calculer le nombre de *Nusselt*, *Nu*, et le coefficient d'échange thermique par convection, *h*.

B- De l'eau chaude circule à *80°C* circule, avec un débit de *2 litres/s*, dans l'espace annulaire compris entre le tube d'acier et un tube de diamètres intérieur D_1*=50mm* et extérieur D_2*=60mm*.

1- Calculer la vitesse de l'écoulement.
2- Calculer le nombre de *Nusselt*, *Nu*, et le coefficient d'échange thermique par convection, *h*.
3- Calculer le flux thermique, Φ, transféré de l'eau à l'huile.

On donne:
- pour l'huile à *T=50°C:* $\lambda=0{,}13\ W/m.°C$; $\mu=2\times10^{-3}\ Kg/m.s$; $\rho=1000\ Kg/m^3$; $C_p=1650\ J/Kg.°C$;
- pour l'eau à *T=80°C:* $\lambda=0{,}67\ W/m.°C$; $\mu=0{,}35\times10^{-3}\ Kg/m.s$; $\rho=972\ Kg/m^3$; $C_p=4200\ J/Kg.°C$

Solution:

A- *L'huile circulant dans un tube*:

1- Vitesse de l'écoulement :

Le débit volumique d'un fluide est, par définition, égal à :

$$\boldsymbol{q_V = SV \Rightarrow V = 4\frac{q_V}{\pi d_1^2}}$$

$$\boldsymbol{A.N.: V \approx 1{,}59\ m/s}$$

2- Nombres de Prandtl, *Pr*, et de Reynolds, *Re*:

On a :

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V d_1}{\mu} \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 25{,}4 \\ Re \approx 15915 \end{cases}$$

Re>3000, l'écoulement est donc turbulent.

1- Nombre de Nusselt, *Nu*, et coefficient d'échange convectif, *h*:

On a :

$$\begin{cases} Nu = 0{,}023\, Re^{0,8}\; Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda Nu}{D_h} \end{cases}$$

$$A.N: \begin{cases} Nu \approx 154 \\ h \approx 1001 W / m^2.°C \end{cases}$$

B- *L'eau circulant dans un espace annulaire*:

1- Vitesse de l'écoulement :

On a:

$$q_V = SV \Rightarrow V = 4\frac{q_V}{\pi\left(D_1^2 - d_2^2\right)}$$

$$\text{(pour un espace annulaire, on a : } D_h = \frac{4S}{P} \text{ avec } S = \frac{\pi}{4}\left(D_1^2 - d_2^2\right) \text{ et } P = 2\pi\left(D_1 + d_2\right))$$

$$A.N.: V \approx 1{,}36\, m / s$$

2- Nombres de Prandtl, *Pr*, et de Reynolds, *Re*:

On a :

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D_h}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V\left(D_1 - d_2\right)}{\mu} \end{cases}$$

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 2{,}2 \\ Re \approx 94423 > 3000 \Rightarrow \text{écoulement turbulent} \end{cases}$$

3- Nombre de Nusselt, *Nu*, et coefficient d'échange convectif, *h*:

On a :

$$\begin{cases} Nu = 0{,}023\, Re^{0,8}\; Pr^{0,33} \\ h = \dfrac{\lambda Nu}{D_h} = \dfrac{\lambda Nu}{\left(D_1 - d_2\right)} \end{cases}$$

$$A.N: \begin{cases} Nu \approx 285 \\ h \approx 7638 W / m^2.°C \end{cases}$$

4- Puissance thermique transférée de l'eau (fluide chaud) à l'huile (fluide froid) à travers la paroi du tube central :

$$\Phi = \frac{T_e - T_h}{R_{th}}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{T_e - T_h}{R_{cv/e} + R_{cd} + R_{cv/h}}$$

$$\Phi = \frac{T_e - T_h}{\dfrac{1}{\pi d_1 L h_1} + \dfrac{Ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_a L} + \dfrac{1}{\pi d_2 L h_2}}$$

Donc: $$\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \frac{T_e - T_h}{\dfrac{1}{\pi d_1 h_1} + \dfrac{Ln\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi\lambda_a} + \dfrac{1}{\pi d_2 h_2}}$$

$$A.N.: \ \Phi' \approx 1551 W/m$$

Où ***Φ'*** est la puissance thermique transférée par unité de longueur du tube.

Exercice 36

Du mercure à une température moyenne de ***93°C*** s'écoule dans un tube de ***12,5 mm*** de diamètre intérieur avec un débit de ***4540 Kg/h.*** La température de la paroi interne du tube est de ***300°C.***

1- Calculer les nombres de *Prandtl*, ***Pr*** et de *Reynolds*, ***Re***. Quelle est la nature de l'écoulement?

2- Calculer le nombre de *Nusselt*, ***Nu***, et le coefficient d'échange thermique par convection, ***h***.

3- En déduire la puissance thermique échangée, par unité de longueur du tube, entre le mercure et la paroi interne du tube.

On donne pour le mercure à $T_{fm}=93°C$: $\lambda=8,9$ Kcal/h.m.°C; $\mu=1,25\times10^{-3}$ Kg/m.s; $\rho=13320$ Kg/m^3; $C_p=0,033$ Kcal/Kg.°C.

Solution:

4- On a:

$$\begin{cases} Pr = \dfrac{\mu C_p}{\lambda} \\ Re = \dfrac{\rho V D}{\mu} = \dfrac{4q_m}{\pi\mu D} \end{cases}$$

En effet: $V = \dfrac{q_m}{S} = \dfrac{q_m}{\frac{\pi}{4}\rho D^2}$ (q_m est le débit massique)

$$A.N.: \begin{cases} Pr \approx 0,017 \\ Re \approx 102764,6 \\ V \approx 0,77\ m/s \end{cases}$$

Re〉3000, l'écoulement du mercure est donc turbulent.

5- Nombre de Nusselt *Nu* et coefficient d'échange *h*:
6- On utilise la corrélation de *Séban-Shimazaki* valable pour les métaux liquides (***Pr<<1***) et pour le cas où la température de la paroi de la conduite est constante:

$$Nu = 4,8 + 0,025.(Re.Pr)^{0,8}$$

A.N.: $Nu \approx 14,6$

Par ailleurs, on a:

$$\boldsymbol{Nu = \frac{hD}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{h = \frac{Nu\lambda}{D}}$$

A.N.: $\begin{cases} \boldsymbol{h \approx 10395 Kcal / h.m^2.°C} \\ \boldsymbol{h \approx 12070 W / m^2.°C} \end{cases}$

On rappelle que $6000 \le h \le 110000\ W/m^2.°C$ pour un métal liquide dans le cas d'une convection forcée.

5 La puissance thermique échangée entre le mercure et le tube est:

$$\Phi = hS\left(T_p - T_f\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi = \pi DLh\left(T_p - T_f\right)}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\Phi' = \frac{\Phi}{L} = \pi Dh\left(T_p - T_f\right)}$$

où: T_f et T_p sont, respectivement, les températures du fluide et de la paroi interne du tube.

A.N.: $\begin{cases} \boldsymbol{\Phi' \approx 84500 Kcal / h.m} \\ \boldsymbol{\Phi' \approx 98114 W / m} \end{cases}$